N° d'enregistrement
au C. N. R. S. :
A. O. 6791

T H E S E S

présentées

A L'UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE

U. E. R. MARSEILLE-LUMINY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

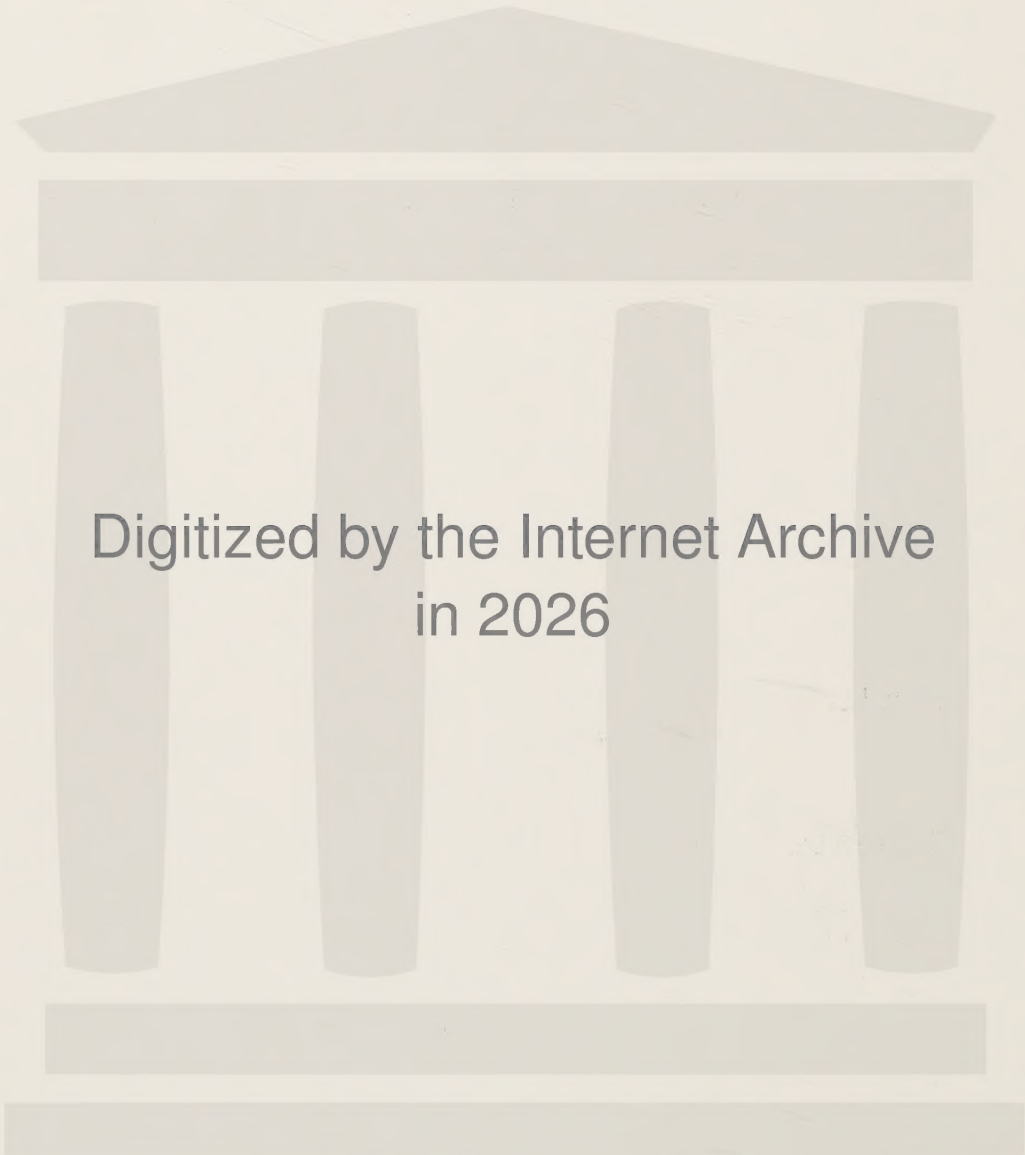
Gérard REYNAUD

1re thèse : QUELQUES RESULTATS SUR LES SOLUTIONS DE SYSTEMES D'INEQUATIONS DE TYPE PARABOLIQUE.

2me thèse : Proposée par Monsieur le Professeur A. MARTINEAU.

Soutenues le 6 avril 1972 devant la Commission d'Examen

M. H. MOREL Président
M. J.L. LIONS
M. A. MARTINEAU
M. G. ZELLER MEIER
} Examinateurs


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545827_0009

N° d'enregistrement
au C. N. R. S. :
A. O. 6791

T H E S E S

présentées

A L'UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE

U. E. R. MARSEILLE-LUMINY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Gérard REYNAUD

1re thèse : QUELQUES RESULTATS SUR LES SOLUTIONS DE SYSTEMES D'INEQUATIONS DE TYPE PARABOLIQUE.

2me thèse : Proposée par Monsieur le Professeur A. MARTINEAU.

Soutenues le 6 avril 1972 devant la Commission d'Examen

M. H. MOREL — Président
M. J.L. LIONS
M. A. MARTINEAU — Examinateurs
M. G. ZELLER-MEIER

N° d'enregistrement
au C. N. R. S. :
A. O. 6791

T H E S E S

présentées

A L'UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE

U. E. R. MARSEILLE-LUMINY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Gérard REYNAUD

1re thèse : QUELQUES RESULTATS SUR LES SOLUTIONS DE SYSTEMES D'INEQUATIONS DE TYPE PARABOLIQUE.

2me thèse : Proposée par Monsieur le Professeur A. MARTINEAU.

Soutenues le 6 avril 1972 devant la Commission d'Examen

M. H. MOREL Président
M. J.L. LIONS
M. A. MARTINEAU
M. G. ZELLER MEIER
} Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Messieurs les Professeurs J. L. LIONS, A. MARTINEAU, H. MOREL, G. ZELLER-MEIER nous ont conseillé, dirigé et encouragé tout au long de nos travaux de recherche, ont bien voulu juger ce travail et ont bien voulu faire partie du Jury de ces Thèses, nous tenons à les en remercier ici.

Qu'il nous soit permis également de remercier Messieurs les Professeurs J. LERAY et P. BILLARD pour les conseils qu'ils ont bien voulu nous prodiguer.

Nous adressons aussi nos plus vifs remerciements à toutes les personnes qui ont bien voul prêter attention et aider à la réalisation de ces Thèses.

S O M M A I R E

1 Notations et hypothèses.

3 Introduction.

9 Chapitre I. Deux théorèmes donnant des estimations à priori.

9 §1 : N quelconque. Démonstration du théorème 1.1 et corollaire 1.1.

38 §2 : N = 1. Démonstration du théorème 1.2 et du corollaire 1.2.

47 Chapitre II. Cas linéaire. Détermination des fonctions poids.

48 §1 : N quelconque. Démonstration des théorèmes 2.1.1, 2.1.2, et 2.1.3.

66 §2 : N = 1. Démonstration des théorèmes 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.3.

74 Chapitre III. Applications.

74 §1 : Unicité. Démonstration des théorèmes d'unicité 3.1.1, 3.1.2 et 3.1.3.

79 §2 : Cas particulier : N = 1. Démonstration des théorèmes 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3.

81 §3 : Contre-exemples.

102 Chapitre IV. Quelques propriétés sur les fonctions poids, et utilisation des méthodes précédentes pour obtenir des théorèmes

d'unicité pour des opérateurs non linéaires.

13 Bibliographie.

NOTATIONS ET HYPOTHESES

Soient, Ω un ouvert de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, T un réel positif, S le cylindre $\Omega \times [0, T]$. Nous noterons $x = (x_1 \dots x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$, $|x|$ la quantité $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ et t un élément de $[0, T]$.

La boule ouverte, de centre l'origine de rayon ρ dans $\mathbb{R}^n$ sera notée B_ρ ,

S_ρ sera la sphère de centre l'origine, de rayon ρ , dans $\mathbb{R}^n$.

Nous noterons par:

ω_ρ l'ensemble $B\rho \cap \Omega$

σ_ρ l'ensemble $S_\rho \cap \Omega$

Γ la frontière de Ω .

Si f est une fonction différentiable, définie dans S, nous noterons par :

$D_i f$ la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x_i,

$D_t f$ la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable t.

Soient $u = (u_1, \dots, u_N)$ et $v = (v_1, \dots, v_N)$ des applications définies dans S à valeur dans $\mathbb{R}^N$, nous noterons par :

u. v la fonction définie par :

$$u.v = u_1 v_1 + \dots + u_p v_p + \dots + u_N v_N,$$

$D_i u$ l'application, définie dans S à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, définie par :

$$D_i u = (D_i u_1 \ ; \ D_i u_2 \ ; \dots ; \ D_i u_N)$$

$D_t u$ l'application, définie dans S à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, définie par :

$$D_t u = (D_t u_1 ; D_t u_2 ; \ldots ; D_t u_N)$$

Nous considèrerons l'opérateur suivant :

$$Lu = \left\{ \sum_{i=1}^{n} D_i \left[\mathcal{P}_{i,p}(u) \right] - \sum_{k=1}^{N} D_t \left[\alpha_{p,k} u_k \right] \right\} = A(u) - D_t B u$$

où, u est une application de S dans $\mathbb{R}^N$ vérifiant certaines propriétés, $\mathcal{P}_{i,p}(u)$ sont des opérateurs du premier ordre vérifiant certaines propriétés et $\alpha_{p,k}$ sont des fonctions définies dans S.

Nous noterons toujours par i et j deux indices qui varieront de 1 à n et par p et k deux indices qui varieront de 1 à N.

Pour simplifier, nous écrirons $\sum_i$, $\sum_{i,j}$, $\sum_p$, ...

au lieu de $\sum_{i=1}^{n}$, $\sum_{i,j=1}^{n}$, $\sum_{p=1}^{N}$, ...

Nous utiliserons des fonctions poids que nous noterons par ϕ et ψ Elles seront définies, en général, dans $\mathbb{R}_+ \times [a,b]$, où $[a,b]$ représente un segment de $\mathbb{R}$.

Nous leur associerons de nouvelles fonctions que nous noterons toujours par ϕ et ψ, définies dans $\mathbb{R}^n \times [a,b]$ par :

$$(x,t) \longrightarrow \phi(x,t) = \phi(|x|,t)$$

où x appartient à $\mathbb{R}^n$ et t appartient à $[a,b]$; de même pour ψ

Pour simplifier, nous noterons par,

$\phi_{|x|}$, ϕ_i, ϕ_t ... les fonctions $D_{|x|}\phi$; $D_i \phi$; $D_t \phi$ ...

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous avons cherché à obtenir des théorèmes relatifs aux solutions d'inéquation du type :

a) $$\int_{\omega_r} (Lv)^2 \, dx \leq \int_{\omega_r} \left[c_1 v^2 + c_2 \sum_i (D_i v)^2 \right] dx,$$

où L est un opérateur du type parabolique, ω_r défini dans les Notations p. 1.

Si L est linéaire, elliptique ou hyperbolique, on sait que a) peut-être considérée comme une inéquation du type Calderon donnant lieu à des théorème d'unicité du problème de Cauchy (séminaire de SCHWARTZ 1960).

Ceci n'est plus valable dans le cas où L est parabolique : pour l'équation de la chaleur par exemple, il n'y a pas unicité si on n'impose pas un ordre de croissance aux solutions [5].

On connait d'autre part dans le cas où L est parabolique certains résultats donnant lieu à des théorèmes d'unicité rétrograde (voir par exemple [1], [6], [7], [8]).

Nous nous sommes intéressés principalement aux problèmes d'unicité directe étudiés entre autres par M. NICOLESCU et C. FOIAS [10], P. MUSTATA [9] et J. CHABROWSKY [3].

L'idée de ce travail nous a été suggérée à la lecture des travaux de D. E. EDMUNDS et VALERIE WILLIAMS [4].

Bien que nous ne traitions pas du même sujet, notre lemme 1.1.2 permet d'améliorer les résultats obtenus par ces auteurs.

En effet, ils considèrent un ensemble Ω inclus dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant les propriétés suivantes :
1) Ω est le complémentaire d'un borné de $\mathbb{R}^n$,
2) On peut utiliser la formule de Green à l'ensemble ω_r.

En utilisant le lemme 1.1.2, leurs théorèmes restent valables quand Ω est un ouvert quelconque.

Sur les conseils de Monsieur H. MOREL, nous avons introduit dans la formulation du problème et les démonstrations, des fonctions poids permettant ainsi d'obtenir des théorèmes d'unicité dans des classes de fonctions non bornées.

D'autre part, sur l'avis de Monsieur J. LERAY, nous n'avons pas cherché uniquement à obtenir des théorèmes d'unicité, mais des théorèmes plus généraux qui peuvent être considérés comme des résultats d'estimation a priori.

Dans le chapitre I, nous traitons le cas où L est non linéaire.
Pour généraliser, nous considérons un système de N équations

$$Lu = \left\{ \sum_{i=1}^{n} D_i \left[\mathcal{P}_{i,p}(u) \right] - \sum_{k=1}^{n} D_t \left[\alpha_{p,k} u_k \right] \right.$$

et nous étudions les solutions de l'inéquation suivante :

$$b) \qquad \int_{\omega_r} -2u\, Lu\, dx \leq \int_{\omega_r} \left[c_1 u^2 + \mu \sum_{i,p} \mathcal{P}_{i,p}(u)\, D_i u_p \right] dx$$

où μ est une constante positive inférieure à 2.

A notre connaissance, les auteurs ayant étudié certains problèmes sur les solutions de a), ont considéré le cas où L est linéaire et vérifie la condition d'ellipticité uniforme suivante :

$$\sum_{i,j,p,k} a^{p}_{ijk}\, D_i u_p\, D_j u_k \geq \alpha \sum_{i,p} (D_i u_p)^2$$

où α est un nombre strictement positif et

$$\sum_{j,k} a^{p}_{i\,jk}\, D_j u_k = \mathcal{P}_{i,p}(u)$$

Dans ce cas particulier b) est plus générale que a). Or, dans ce travail, nous n'imposons pas la condition d'ellipticité uniforme, mais la condition plus faible suivante :

$$\sum_{i,p} \mathcal{P}_{i,p}(u) \quad D_i u_p \geq 0$$

Ce qui nous a amené à étudier les solutions de b).

Nous obtenons comme résultat principal dans ce chapitre que, sous certaines conditions que doit vérifier la fonction poids ϕ, la fonction

$t \to \int_{\Omega} \phi^2 v^2 \, dx$ est décroissante.

Dans le paragraphe 2 (chap. I), nous nous intéresserons au cas où N=1, et nous obtenons ainsi des résultats semblables à ceux du paragraphe précédent mais ne portant que sur la partie positive ou la partie négative des solutions.

Dans le chapitre II (cas linéaire), nous avons cherché principalement à déterminer des fonctions poids ϕ, vérifiant les conditions demandées dans le chapitre I, pour le cas particulier où on connait un ordre de croissance des coefficients intervenant dans b). Nous en déduisons alors des théorèmes analogues aux précédents et dont nous nous servons dans le chapitre III pour obtenir des théorèmes d'unicité.

Nous insistons plus particulièrement sur le paragraphe 2(chap. III) où nous obtenons (cas N = 1) des théorèmes d'unicité en n'imposant une restriction de croissance qu'à la partie négative de la solution. Les résultats obtenus sont plus forts que ceux de J. CHABROWSKY [3] qui, déjà, généralise ceux de [9] [10].
Rappelons brièvement ses hypothèses et son théorème :

Il considère une équation parabolique de la forme :

c) $$Lu = \sum_{i,j} a_{ij} D_i [D_j u] + \sum_i b_i D_i u + cu - D_t u = 0$$

$a_{ij} = a_{ji}$.

I Si les coefficients de l'équation sont holdériens par rapport aux variables (x, t) dans $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ et de classe $C^2(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ par rapport aux variables spatiales $x = (x_1, \ldots x_n)$,

II s'il existe une constante positive K telle que :

$$|a_{ij}(x, t)| \leq K ; \quad |D_i a_{ij}(x, t)|, \ |b_i(x, t)| \leq K (1 + |x|)$$

$$|D_i [D_j a_{ij}(x, t)]|, \ |D_i b_i(x, t)|, \ |c(x, t)| \leq K (1 + |x|)^2,$$

III si la forme quadratique

$$A(\xi) = \sum_{i,j} a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j$$

est uniformément elliptique, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$A(\xi) \geq \alpha |\xi|^2 ,$$

si u est une solution de b) vérifiant :

$u, D_t u, D_i u, D_i [D_j u]$ continues dans $\mathbb{R}^n \times [0, T]$

$$\int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^n} u_- (x, t) \exp(-m |x|^2) \, dx < +\infty$$

où m est une constante positive et $u_- (x, t) = \max [0, -u(x, t)]$,

$u(x, 0) = 0$

alors $u(x, t) \geq 0$ dans $\mathbb{R}^n \times [0, T]$.

En se référant à notre paragraphe 2(chap. III), si les coefficients vérifient I, III' (ou II '''), III :

$$\text{II}' \begin{cases} |a_{ij}(x,t)| \le K\,(1+|x|)^{\lambda}\ ; \\ |b_i(x,t)|^2\ ,\ |D_i\,a_{ij}(x,t)|^2\ ,\ |c| \le K(1+|x|)^{2-\lambda} \\ \lambda \text{ constante vérifiant } 0 \le \lambda < 2 \end{cases}$$

$$\text{II}'' \begin{cases} |a_{ij}(x,t)| \le K\,(1+|x|)^2\,[\text{Log}\,(2+|x|]^2 \\ |b_i(x,t)|\ ,\ |D_i\,a_{ij}(x,t)|^2,\ |c| \le K\,[\text{Log}(2+|x|)]^{2-\nu} \\ \nu \text{ constante vérifiant } 0 \le \nu \le 1 \end{cases}$$

et si u est solution de b) vérifiant :

$$\begin{cases} u,\ D_t u,\ D_i u,\ D_i[D_j u] \text{ continues dans } \mathbb{R}^n \times [0,T] \\ \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\exp(-m\,|x|^{2-\lambda})\,dx \\ \text{dans le cas de la condition II}' \\ \text{ou} \\ \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\exp\left[-m[\text{Log}\,(2+|x|)]^{2-\nu}\right]dx \\ \text{dans le cas de la condition II}'' \\ u(x,0) \ge 0 \end{cases}$$

alors, en utilisant les théorèmes 3.2.1, 3.2.2, nous obtenons

$u(x,t) \ge 0$ dans $\mathbb{R}^n \times [0,T]$

en utilisant le théorème de G. ARONSON et P. BESALA [2], il obtient :

$u(x,t) = 0$ dans $\mathbb{R}^n \times [0,T]$.

Dans le cas II', avec des conditions plus fortes, nous pouvons nous aussi utiliser le résultat de [ ] et obtenir que si

$u(x,0) = 0$ alors $u(x,t) = 0$ dans $\mathbb{R}^n \times [0,T]$.

Dans le paragraphe 3 (chap. III), nous donnons des exemples montrant que, dans un certain sens, nous ne pouvons améliorer les résultats précédents.

Dans le chapitre IV, nous démontrons un théorème relatif aux fonctions poids, éliminant la possibilité d'obtenir, dans un certain sens, de nouvelles fonctions poids donnant de meilleurs résultats que ceux du chapitre II.

Enfin, nous montrons sur quelques cas particuliers que la méthode utilisée est applicable à la recherche de théorèmes d'unicité dans des cas non linéaires.

I - DEUX THEOREMES DONNANT LIEU A DES MAJORATIONS A PRIORI.

§1 - CAS GENERAL

Définition 1.1.1 : Nous dirons que l'application u définie dans S à valeur dans $\mathbb{R}^N$ appartient à $[C^{1,2}(S)]^N$ si u appartient à $[C^1(S)]^N$ et si pour tout couple (i, j), $D_i [D_j u]$ est une application continue dans S.

Hypothèses.

Hypothèses sur les opérateurs :

Les opérateurs $\mathcal{P}_{i,p}$ sont des opérateurs différentiels du premier ordre qui vérifient les propriétés suivantes :

i) Pour tout u appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, $\mathcal{P}_{i,p}(u)$ est continue dans S, ainsi que $D_i[\mathcal{P}_{i,p}(u)]$.

ii) Si on note $P_{i,p}(u, D_j u_k) = \mathcal{P}_{i,p}(u)$, il existe une constante K_o positive, telle que, pour tout $\xi = (\xi_i^p)$, $\beta = (\beta_i^p)$ appartenant à $\mathbb{R}^{n \times N}$, pour tout u appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, on ait :

$$\sum_{i,p} \xi_i^p \; P_{i,p}(u, \beta_j^k) \leq K_o \left[\lambda F \sum_{i,p} (\xi_i^p)^2 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i,p} \beta_i^p \; P_{i,p}(u, \beta_j^k) \right]$$

et ceci pour tout λ réel strictement positif, où F est une fonction positive définie dans S.

[Exemple d'opérateurs vérifiant la propriété (ii) :

Soient les opérateurs $\mathcal{P}_{i,p}$ définis par :

$$\mathcal{P}_{i,p}(u, D_j u_k) = \varepsilon(u, D_l u_m) \sum_{j,k} a^p_{ijk} \; D_j u_k \,,$$

où : a^{p}_{ijk} sont des fonctions définies dans S, vérifiant :

$a^{p}_{ijk} = a^{k}_{jip}$,

ε est un opérateur vérifiant (pour tout u appartenant à $\left[C^1(S)\right]^N$) :

$0 < m \leq \varepsilon\ (u, D_l u_m) \leq M$

m et M étant des constantes données.

Si nous avons la condition d'éllipcité suivante :

pour tout $\xi = (\xi_i^p)$ appartenant à $\mathbb{R}^{n \times N}$, nous avons :

$$F_1 \sum_{i,p} (\xi_i^p)^2 \leq \sum_{i,p} \xi_i^p \mathcal{P}_{i,p}(u, D_j u_k) \leq F_2 \sum_{i,p} (\xi_i^p)^2 ,$$

F_1 et F_2 étant des fonctions positives définies dans S,

alors les opérateurs $\mathcal{P}_{i,p}$ vérifient la condition (ii).

En effet, considérons la quantité :

$$\sum_{i,j,k,p} a^{p}_{ijk} \left(-\lambda\ \xi_i^p + \beta_i^p\right) \left(-\lambda\ \xi_j^k + \beta_j^k\right)$$

où λ est un réel positif et $(\xi_i^p), (\beta_i^p)$ appartiennent à $\mathbb{R}^{n \times N}$.

D'après la condition d'éllipcité et le fait que ε est positif, la quantité précédente est positive. D'où :

$$0 \leq \lambda^2 \sum_{i,j,k,p} a^{p}_{ijk} \xi^{p}_{i} \xi^{k}_{j} - 2\lambda \sum_{i,j} a^{p}_{iik} \xi^{p}_{i} \beta^{k}_{i} +$$

$$+ \sum_{i,j,k,p} a^{p}_{ijk} \beta^{p}_{i} \beta^{k}_{j} .$$

Comme λ est positif, on en déduit après avoir divisé par λ et multiplié par $\varepsilon(u, \beta^{m}_{l})$ que,

$$\sum_{i,p} \xi^{p}_{i} \left[\sum_{j,k} \varepsilon(u, \beta^{m}_{l}) a^{p}_{ijk} \beta^{k}_{j} \right]$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\lambda \sum_{i,p} \xi^{p}_{i} \varepsilon(u, \beta^{m}_{l}) \sum_{j,k} a^{p}_{iik} \right]$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \sum_{i,p} \beta^{p}_{i} \varepsilon(u, \beta^{m}_{l}) \sum_{j,k} a^{p}_{ijk} \beta^{k}_{j} \Bigg]$$

On en déduit que :

$$\sum_{i,p} \xi^{p}_{i} \mathcal{P}_{i,p}(u, \beta^{k}_{j}) \leq \frac{1}{2} \left[\lambda \frac{M}{m} E \sum_{i,p} (\xi^{p}_{i})^2 + \right.$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \sum_{i,p} \beta_i^p \, \mathcal{P}_{i,p}\,(u, \beta_j^k) \Big] .$$

ce qu'il fallait démontrer.

Hypothèses sur les coefficients :

iii) Les coefficients $\alpha_{p,k}$ sont des fonctions définies dans S, localement lipschitziennes dans S.

iv) Pour tout u appartenant à $\left[C^{1,2}(S)\right]^N$ on a :

$$\sum_{p,k} \alpha_{p,k}\, u_k u_p \geq G\, u^2$$

$$\sum_{p,k} D_t\,(\alpha_{p,k}) u_k u_p \geq -H u^2 ,$$

G et H étant des fonctions positives, définies dans S

v) $\alpha_{pk} = \alpha_{kp}$.

THEOREME 1.1

Soit v appartenant à $\left[C^{1,2}(S)\right]^N$, vérifiant $v(x,t) = 0$ pour (x,t) appartenant à $\Gamma \times [0,T]$, v solution de l'inéquation suivante,

1.1.1 pour tout r supérieur ou égal à r_o (r_o constante positive donnée) et pour tout t appartenant à $[0, T]$

$$\int_{\omega_r} -2vLv\,dx \leq \int_{\omega_r} \left[c_1 v^2 + \mu \sum_{i,p} D_i v_p \, \mathcal{P}_{i,p}(v) \right] dx$$

où c_1 appartient à C(S) et μ est une constante positive inférieure à 2.

Soit ϕ une fonction définie dans $\mathbb{R}_+ \times [t_1, t_2]$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ où (t_1, t_2) vérifie $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ vérifiant :

1.1.2 ϕ est continue, lipschitzienne par rapport à la variable t

1.1.3 $\phi(|x|, t) = \phi(r_o, t)$ pour tout $|x| \leq r_o$,

1.1.4 les fonctions $t \to \phi(|x|, t)$ et $|x| \to \phi(|x|, t)$ sont décroissantes,

1.1.5 ϕ est solution presque partout de l'inéquation suivante :

$$-\phi\phi_t G - \phi^2 [H + c_1] - \frac{32 k_o^2}{2-\mu} \phi_{|x|}^2 F \leq 0$$

1.1.6 Si ϕ et v vérifient la condition suivante : pour tout (τ_1, τ_2) vérifiant $t_1 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq t_2$, il existe une suite r_m tendant vers l'infini et une suite R_m tendant vers zéro, telles que :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_{r_m}} \sum_{i,p} D_i \left[2 \phi^2 v_p \, \mathcal{P}_{i,p}(v) \right] dx\,dt \leq R_m,$$

alors,

1) la fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\int_\Omega \sum_{p,k} \phi^2 \alpha_{p,k} \, v_p v_k \, dx$$ est une fonction décroissante de t pour t appartenant à $[t_1, t_2]$,

2) si il existe t_3 appartenant à $[t_1, t_2]$ tel que,

$$\int_\Omega \sum_{p,k} \phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx \text{ soit fini pour } t = t_3, \text{ alors,}$$

$$\int_\Omega \sum_{p,k} \phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx < +\infty \text{ pour tout } \tau \text{ appartenant à } [t_3, t_2]$$

$$\text{et} \quad \int_{t_3}^{t_2} \int_\Omega \left[-\phi\phi_t G v^2 + \phi^2 \sum_{i,p} D_i v_p \mathcal{P}_{i,p}(v) \right] dx \, dt < +\infty$$

Remarque 1.1.1 :

Le théorème précédent est valable sans la condition iv) mais la fonction doit vérifier la condition 1.1.5' qui remplace la condition 1.1.5.

1.1.5' Pour tout u appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$ on a :

$$\sum_{p,k} \left[-2\phi\phi_t \alpha_{p,k} + \phi^2 D_t(\alpha_{p,k}) \right] u_k u_p - \left(\phi^2 C_1 + \frac{32 k_0^2}{2-\mu} \phi^2_{|x|} F \right) u^2 \geq -\phi\phi_t G u^2$$

où G est une fonction positive définie dans S.

Il suffit de reprendre les calculs et de vérifier que si la condition iv) n'a pas lieu, certaines minorations et majorations ne peuvent pas se faire, et alors il faut que ϕ vérifie 1.1.5' pour pouvoir continuer les calculs.

Remarque 1.1.2 :

Dans l'inéquation 1.1.1, on pose la condition suivante :
« μ est une constante positive inférieure à 2. »

Cette restriction provient du fait que nous étudions un problème assez général. Dans le cas habituel, l'opérateur A (voir notation) est linéaire et vérifie une condition d'ellipticité uniforme. On étudie alors les solutions d'inéquations du type (a) (voir introduction). Dans ce cas, les solutions d'inéquations du type (a) sont aussi solutions d'inéquations du type 1.1.1. En effet, soit l'opérateur A linéaire défini par :

pour tout u appartenant à $\left[C^{1,2}(S)\right]^N$

$$A(u) = \left\{ \sum_{i,j,k} D_i \left[a^{p}_{ijk} \quad D_j u_k \right] \right.$$

où a^{p}_{ijk} appartiennent à $C^1(S)$.

Supposons que A vérifie la condition d'ellipticité uniforme suivante :

il existe une constante strictement positive k_o , tel que, pour tout u appartenant à $\left[C^{1,2}(S)\right]^N$,

$$k_o \sum_i (D_i u)^2 \leq \sum_{i,j,k,p} a^{p}_{ijk} \quad D_i u_p \, D_j u_k \quad .$$

Démontrons alors que si u est solution de (a) :

(a) $\left\{ \right.$ pour tout r supérieur ou égal à r_o, pour tout t appartenant à $0, T$

$$\int_{\omega_r} (Lu)^2 \, dx \leq \int_{\omega_r} \left[c_1 u^2 + c_2 \sum_i (D_i u)^2 \right] dx$$

où c_1 et c_2 appartiennent à $C^1(S)$

alors u est solution d'une inéquation du type 1.1.1.

En effet, on a, pour tout λ réel strictement positif :

$$\int_{\omega_r} -2uLu\, dx \leq \int_{\omega_r} \left[\lambda u^2 + \frac{1}{\lambda} (Lu)^2\right] dx.$$

Si u est solution de (a), alors pour tout r supérieur ou égal à r_o, pour tout t appartenant à $[0, T]$, on a :

$$\int_{\omega_r} -2u\, Lu\, dx \leq \int_{\omega_r} \left[\left(\lambda + \frac{1}{\lambda} c_1\right) u^2 + \frac{c_2}{\lambda k_o} \sum_{i,j,k,p} a^{p}_{ijk} D_i u_p D_j u_k\right] dx ,$$

En choisissant λ de telle sorte que :

$$\frac{c_2}{\lambda k_o} \leq \mu < 2 ,$$

on a : u solution d'une inéquation du type 1.1.1.

Démonstration du théorème 1.1.1.

Soit ϕ une fonction définie dans $\mathbb{R}_+ \times [t_1, t_2]$ où $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant les propriétés 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4. Nous lui associons une fonction que nous noterons encore par ϕ, définie dans $\mathbb{R}^n \times [t_1, t_2]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ par,

$(x, t) \longrightarrow \phi(x, t) = \phi(|x|, t)$.

Comme ϕ est lipschitzienne dans $\mathbb{R}^n \times [t_1, t_2]$, elle admet des dérivées partielles au sens usuel en presque tout point de $\mathbb{R}^n \times [t_1, t_2]$, (voir [12]).

Soit v appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$ et considérons l'identité suivante :

1.1.7 $-2\phi^2 v L v \equiv -2\phi^2 v A(v) + 2\phi^2 v D_t[\alpha v]$.

Etudions chacun des termes du deuxième membre de l'identité, on a presque partout dans $\Omega \times [t_1, t_2]$,

1.1.8 $$-\sum_{i,p} 2\phi^2 v_p D_i[\mathcal{P}_{i,p}(v)] = -\sum_{i,p} D_i\left[2\phi^2 v_p \mathcal{P}_{i,p}(v)\right] +$$

$$+\sum_{i,p} 4\phi\phi_{|x|} \frac{x_i}{r} v_p \mathcal{P}_{i,p}(v) + 2\phi^2 \sum_{i,p} D_i v_p \mathcal{P}_{i,p}(v).$$

En utilisant l'hypothèse ii on a :

$$-\sum_{i,p} 4\phi\phi_{|x|} \frac{x_i}{r} v_p \mathcal{P}_{i,p}(v) \leq$$

$$\leq 4k_o \left[\lambda F \phi^2 \phi^2_{|x|} v^2 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i,p} D_i v_p \mathcal{P}_{i,p}(v)\right]$$

pour tout $\lambda > 0$.

Comme $\phi^2 > 0$, on a, en posant $\lambda' = \lambda\phi^2$ et en changeant les signes de l'inégalité :

$$\sum_{i,p} 4\phi\phi_{|x|} \frac{x_i}{r} v_p \mathcal{P}_{i,p}(v) \geq$$

$$\geq -4k_o \left[\lambda' F \phi^2_{|x|} v^2 + \frac{\phi^2}{\lambda'} \sum_{i,p} D_i v_p \mathcal{P}_{i,p}(v)\right]$$

pour tout $\lambda' > 0$.

Portons ce résultat dans 1.1.8, nous obtenons

$$-\sum_{i,p} 2\,\phi^2\, v_p\, D_i\left[\mathcal{P}_{i,p}(v)\right] \geq -\sum_{i,p} D_i\left[2\,\phi^2\, v_p\, \mathcal{P}_{i,p}(v)\right] -$$

$$-4k_0\,\lambda' F\,\phi^2_{|x|}\, v^2 + 2\,\phi^2\left[1-\frac{2k_0}{\lambda'}\right]\sum_{i,p} D_i v_p\, \mathcal{P}_{i,p}(v)\,,$$

inégalité vraie pour tout $\lambda' > 0$ et en presque tout point de $\Omega \times [t_1, t_2]$.

Etudions le terme $2\phi^2 v D_t(\alpha v)$, on a :

$$2\phi^2 v D_t(\alpha v) = \sum_{p,k} 2\,\phi^2 v_p D_t(\alpha_{p,k} v_k)$$

$$= \sum_{p,k} 2\,\phi^2\, \alpha_{p,k}\, v_p\, D_t\, v_k + \sum_{p,k} 2\phi^2\, v_p v_k\, D_t\, \alpha_{p,k}\,.$$

En utilisant l'hypothèse v), on a :

$$2\phi^2 v\, D_t(\alpha v) = \sum_{p,k} \phi^2\, \alpha_{p,k}\, D_t(v_p\, v_k) + \sum_{p,k} 2\,\phi^2\, v_p\, v_k\, D_t\, \alpha_{p,k}$$

$$= \sum_{p,k} D_t\left[\phi^2\, \alpha_{p,k}\, v_p\, v_k\right] + \sum_{p,k} \phi^2\, v_p\, v_k\, D_t\, \alpha_{p,k} - \sum_{p,k} 2\,\phi\phi_t\, \alpha_{p,k} v_p v$$

Portons ces résultats dans l'identité 1.1.7 en tenant compte de l'hypothèse iv) et du fait que $\phi\phi_t \leq 0$ on a, presque partout dans $\Omega \times [t_1, t_2]$,

$$\sum_{i,p} D_i \left[2\phi^2 v_p \mathcal{P}_{i,p}(v) \right] + \sum_{p,k} D_t \left[\phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \right] +$$

$$+ \left[-2\phi\phi_t G - \phi^2 H - 4 k_o \lambda' \phi^2_{|x|} F \right] v^2 +$$

$$2 \phi^2 \left[1 - \frac{2k_o}{\lambda'} \right] \sum_{i,p} D_i v_p \mathcal{P}_{i,p}(v) .$$

1. 1. 1. Considérons la

$$\int_{\cdot} \left[c_1 v^2 + \mu \sum_{i,p} D_i v_p \mathcal{P}_{i,p}(v) \right] dx ,$$

que l'on peut écrire, en utilisant le théorème de

$$\int_{r_0}^{r} \int_{\sigma_r} \left[c_1 v^2 + \mu \sum_{i,p} D_i v_p \mathcal{P}_{i,p}(v) - 2 v L v \right] ds\, dr ,$$

où ds est l'élément d'aire de σ_r .

D'après les propriétés de ϕ :
la fonction ϕ ne dépend que de r,
la fonction ϕ est indépendante de $|x|$ pour $|x| \leq r_o$,

on a :

$$I = \int_0^r \phi^2 \, J_\rho \, d_\rho = \phi^2(r_o) \int_0^{r_o} J_\rho \, d_\rho + \int_{r_o}^r \phi^2 \, J_\rho \, d_\rho$$

où $J_r = \int_{\sigma_r} \left[c_1 v^2 + \mu \sum_{i,p} D_i v_p \, \mathcal{P}_{i,p}(v) - 2 \, vLv \right] ds.$

Soit le théorème suivant (corollaire du deuxième théorème de la moyenne) :

Soient f et g deux fonctions définies sur le segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}$.

Si f est une fonction positive décroissante continue,
si g est une fonction continue,

alors il existe X vérifiant $a \leqslant X \leqslant b$ tel que :

$$\int_a^b f(t) \, g(t) \, dt = f(a) \int_a^X g(t) \, dt \quad .$$

Démontrons ici que le théorème reste valable si g est intégrable uniquement.

En effet, soit g appartenant à $\mathcal{L}^1[a, b]$. On sait que l'espace vectoriel des fonctions continues définies dans $[a, b]$ est dense dans $\mathcal{L}^1[a, b]$ lorsque $\mathcal{L}^1[a, b]$ est muni de la topologie associée à la semi-norme N_1

$$(N_1(f) = \int_a^b |f| \, dx)$$

Donc pour tout ε positif, il existe une fonction continue g_ε tel que :

$$\int_a^b |g-g_\varepsilon| \, dt \leqslant \varepsilon ,$$

ce qui entraine que :

$$(\alpha) \qquad \int_a^X g_\varepsilon \, dt - \varepsilon \leqslant \int_a^X g \, dt \leqslant \int_a^X g_\varepsilon \, dt + \varepsilon \quad .$$

Comme g_ε est continue, on peut utiliser le théorème précédent, il existe donc X_ε vérifiant $a \leqslant X_\varepsilon \leqslant b$ tel que,

$$\int_a^b f\, g_\varepsilon \, dt = f(a) \int_a^{X_\varepsilon} g_\varepsilon \, dt \quad .$$

De plus : $$\left| \int_a^b f(g-g_\varepsilon) \, dt \right| \leqslant f(a) . \varepsilon$$

c'est-à-dire :

$$\int_a^b g_\varepsilon f \, dt - f(a) . \varepsilon \leqslant \int_a^b f\, g \, dt \leqslant \int_a^b g_\varepsilon f \, dt + f(a) . \varepsilon \quad .$$

On a donc :

$$f(a) \int_a^{X_\varepsilon} g_\varepsilon \, dt - f(a) . \varepsilon \leqslant \int_a^b f\, g \, dt \leqslant f(a) \int_a^{X_\varepsilon} g_\varepsilon \, dt + 2\, f(a) . \varepsilon \quad .$$

Nous obtenons donc, en utilisant l'inégalité (α) :

$$f(a)\int_a^{X_\varepsilon} g\,dt - 2f(a).\varepsilon \leqslant \int_a^b f\,g\,dt \leqslant f(a)\int_a^{X_\varepsilon} g\,dt + 2f(a).\varepsilon ,$$

inégalités vraies pour tout ε .

Considérons une suite ε_n tendant vers zéro ; comme X_{ε_n} appartient au segment fermé $[a,b]$, il existe une sous-suite que l'on note encore X_{ε_n} qui converge vers X appartenant au segment $[a,b]$.

On a donc, pour tout X_{ε_n},

$$f(a)\int_a^{X_{\varepsilon_n}} g\,dt - 2f(a).\varepsilon_n \leqslant \int_a^b f\,g\,dt \leqslant f(a)\int_a^{X_{\varepsilon_n}} g\,dt + 2f(a)\,\varepsilon_n .$$

A la limite, quand n tend vers l'infini, on obtient :

$\int_a^b fg\,dt = f(a)\int_a^X g\,dt$, ce qu'il fallait démontrer.

Comme ϕ^2 est une fonction continue, positive, décroissante, et que J_r est une fonction intégrable, en utilisant le théorème précédent, on a :

$$\int_{r_o}^{r} \phi^2\, J_\rho\, d\rho = \phi^2(r_o)\int_{r_o}^{r'} J_\rho\, d\rho ,$$ où r est un réel vérifiant $r_o \leqslant r' \leqslant r$

D'où :

$$I(r) = \phi(r_o)\int_0^{r'} J_\rho\, d\rho \geqslant 0, \text{ avec } r_o \leqslant r' \leqslant r$$

On en déduit donc :

Si v est solution de 1.1.1, alors v est solution de :

$$\int_{\omega_r} -2\Phi^2 \, v \, L \, v \, dx \leq \int_{\omega_r} \Phi^2 \left[c_1 v^2 + \mu \sum_{i,p} D_i v_p \mathcal{P}_{i,p}(v) \right] dx \quad .$$

Intégrons 1.1.9 sur $\omega_r \times [\tau_1, \tau_2]$, où $r \geq r_o$ et $t_1 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq t_2$.

Nous pouvons faire cette intégration, car les quantités qui interviennent dans 1.1.9 sont localement intégrables sur $\Omega \times [t_1, t_2]$.

Si on suppose que v est solution de 1.1.1, on obtient :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \left[-2 \Phi \Phi_t G - \Phi^2 H - 4 K_o \lambda' \Phi^2_{|x|} F - c_1 \Phi^2 \right] v^2 \, dx \, dt +$$

$$\int_r^{\tau_2} 2 \Phi^2 \left[1 - \frac{2K_o}{\lambda'} - \frac{\mu}{2} \right] \sum_{i,p} D_i v_p \mathcal{P}_{i,p}(v) \, dx \, dt \leq$$

$$\int_{\omega_r} D_i \left[2 \Phi^2 v_p \mathcal{P}_{i,p}(v) \right] dx \, dt - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \sum_{p,k} D_t \left[\Phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \right] dx \, dt$$

Prenons λ' tel que $1 - \frac{2K_o}{\lambda'} - \frac{\mu}{2} > 0$ par exemple $\lambda' = \frac{8K_o}{2 - \mu}$, on a :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \left[-2\Phi\Phi_t G - \Phi^2 (H + c_1) - \frac{32K_o^2}{2-\mu} \Phi^2_{|x|} F \right] v^2 \, dx \, dt +$$

$$1.1.10 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \frac{2-\mu}{2} \phi^2 \sum_{i,p} D_i v_p \cdot \mathcal{P}_{i,p}(v) \, dx \, dt \leq$$

$$\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \sum_{i,p} D_i \left[2\phi^2 v_p \mathcal{P}_{i,p}(v) \right] dx \, dt - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \sum_{p,k} D_t \left[\phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \right] dx \, dt \, .$$

Considérons la quantité :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \sum_{p,k} D_t \left[\phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \right] dx \, dt \, .$$

D'après les hypothèses faites sur v, ϕ, $\alpha_{p,k}$, on peut assurer que la fonction $\sum_{p,k} \phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k$ est absolument continue sur tout segment parallèle à l'axe des t contenue dans $\Omega \times [t_1, t_2]$. D'après le théorème de Fubini et la propriété que $\sum_{p,k} \phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k$ est absolument continue, on a :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} D_t \left[\sum_{p,k} \phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx \, dt \right] =$$

$$= \int_{\omega_r} \int_{\tau_1}^{\tau_2} D_t \left[\sum_{p,k} \phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \right] dx \, dt$$

$$= \left[\int_{\omega_r} \sum_{p,k} \phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx \right]_{t=\tau_2} - \left[\int_{\omega_r} \sum_{p,k} \phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx \right]_{t=\tau_1}$$

De plus, si $r = r_m$, on a, d'après 1.1.6 :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{r_m}^{\omega} D_i \left[2\phi^2 \, v_p \, \mathcal{P}_{i,p}(v) \right] dx \, dt \leq R_m$$

Supposons que ϕ vérifie la propriété 1.1.5, on a, en considérant 1.1.10 dans lequel on fait $r = r_m$,

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{r_m}^{\omega} \left[- \phi \phi_t \, G \, v^2 + \frac{2-\mu}{2} \phi^2 \sum_{i,p} D_i \, v_p \, \mathcal{P}_{i,p}(v) \right] dx \, dt \leq$$

$$1.1.11 \quad \leq R_m + \left[\int_{r_m}^{\omega} \sum_{p,k} \phi^2 \, \alpha_{p,k} \, v_p \, v_k \, dx \right]_{t=\tau_1} -$$

$$- \left[\int_{r_m}^{\omega} \sum_{p,k} \phi^2 \, \alpha_{p,k} \, v_p \, v_k \, dx \right]_{t=\tau_2}$$

Considérons l'hypothèse (ii) :

$$\sum_{i,p} \xi_i^p \, \mathcal{P}_{i,p}(u, \beta_j^k) \leq k_0 \left[\lambda F \sum_{i,p} (\xi_i^p)^2 + \frac{1}{\lambda} \Gamma \, n \, \mathcal{P}_{i,p}(u, \beta_j^k) \right]$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout (ξ_i^p) appartenant à $\mathbb{R}^{nxN}$, si nous prenons $(\xi_i^p) = 0$, nous en déduisons :

$$\sum_{i,p} \beta_i^p \, \mathcal{P}_{i,p}(u, \beta_j^k) \geq 0 .$$

De plus, comme $\phi\ \phi_t$ est négatif ou nul, et que μ est inférieur à 2, la quantité :

$$-\phi\phi_t\ G\ v^2 + \frac{2-\mu}{2}\ \phi^2 \sum_{i,p} D_i\ v_p\ \mathcal{G}_{i,p}(v) \quad \text{est positive ou nulle.}$$

Donc,

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \left[-\phi\phi_t\ G\ v^2 + \frac{2-\mu}{2}\ \phi^2 \sum_{i,p} D_i\ v_p\ \mathcal{G}_{i,p}(v) \right] dx\ dt$$

est une fonction croissante de r et,

$$\lim_{m \to +\infty} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_{r_m}} \left[-\phi\phi_t\ Gv^2 + \frac{2-\mu}{2}\ \phi^2 \sum_{i,p} D_i\ v_p\ \mathcal{G}_{i,p}(v) \right] dx\ dt$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \left[-\phi\phi_t\ G\ v^2 + \frac{2-\mu}{2}\ \phi^2 \sum_{i,p} D_i\ v_p\ \mathcal{G}_{i,p}(v) \right] dx\ dt\ ,$$

la limite pouvant être infinie.

De même, l'hypothèse iv) entraîne que :

$\int_{\omega_r} \sum_{p,k} \phi^2\ \alpha_{p,k}\ v_p\ v_k\ dx$ est une fonction croissante de r. On a donc :

$$\lim_{m \to +\infty} \int_{\omega_{r_m}} \sum_{p,k} \phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k\ dx = \int_{\Omega} \sum_{p,k} \phi^2\ \alpha_{p,k}\ v_p\ v_k\ dx$$

et ceci pour tout t fixe appartenant à $[t_1, t_2]$

Donc si dans 1.1.11, on fait tendre m vers l'infini en se rappelant que R_m tend vers zéro, à la limite, on a :

$$0 \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \left[- \phi \phi_t G v^2 + \frac{2-\mu}{2} \phi^2 \sum_{i,p} D_i v_p \mathcal{G}_{i,p}(v) \right] dx\, dt \leq$$

$$1.1.12 \quad \leq \left[\int_{\Omega} \sum_{p,k} \phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx \right]_{t=\tau_1} - \left[\int_{\Omega} \sum_{p,k} \phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx \right]_{t=\tau_2}$$

Donc, pour tout (τ_1, τ_2) tel que $0 \leq t_1 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq t_2 \leq T$, on a :

$$\left[\int_{\Omega} \sum_{p,k} \phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx \right]_{t=\tau_1} \geq \left[\int_{\Omega} \sum_{p,k} \phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx \right]_{t=\tau_2}$$

ce qui démontre la première partie du théorème.

Si de plus, il existe t_3 appartenant à $[t_1, t_2]$ tel que :

$$\left[\int_{\Omega} \sum_{p,k} \phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx \right]_{t=t_3} < + \infty ,$$

alors d'après ce qui précède,

$$\left[\int_{\Omega} \sum_{p,k} \phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx \right]_{t=\tau} < + \infty \text{ pour tout } \tau$$

appartenant à $[t_3, t_2]$.

Donc d'après 1.1.12, on a :

$$0 \leq \int_{t_3}^{t_2} \int_{\Omega} \left[-\phi\phi_t \; G v^2 + \frac{2-\mu}{2} \phi^2 \sum_{i,p} D_i v_p \mathcal{P}_{i,p}(v) \right] dx\, dt < +\infty .$$

Ce qui démontre la deuxième partie du théorème.

Corollaire :

Si dans les hypothèses on remplace i par i' :

(i') : pour tout u appartenant à $\left[C^{1,2}(S)\right]^N$, les $\mathcal{P}_{i,p}(u)$ sont localement lipschitziennes dans S ;
alors le théorème reste valable si on remplace 1.1.2 et 1.1.6 par :

1.1.2') ϕ est lipschitzienne dans tout borné de $\mathbb{R}_+ \times [t_1, t_2]$

1.1.6') ϕ et v vérifient la condition suivante :

pour tout (τ_1, τ_2) $(t_1 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq t_2)$, il existe une suite r_m tendant vers l'infini et une suite R_m tendant vers zéro, telles que

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_{r_m}} \sum_{i,p} 2\phi^2 \frac{x_i}{r_m} v_p \mathcal{P}_{i,p}(v) \, ds\, dt \leq R_m .$$

Démonstration

D'après les hypothèses faites, nous pouvons encore utiliser 1.1.10.

Pour démontrer le corollaire, il suffit de démontrer que :

Pour démontrer le corollaire, il suffit de démontrer que :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \sum_{i,p} D_i \left[2\,\phi^2\, v_p\, \mathcal{P}_{i,p}(v) \right] dx\, dt =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i,p} 2\,\phi^2\, v_p\, \mathcal{P}_{i,p}(v)\, \frac{x_i}{r}\, ds\, dt \quad .$$

Pour démontrer cette égalité, nous allons démontrer deux lemmes.

Définition 1.1.2

Soit u une application définie dans $\overline{\Omega} \times [t_1, t_2]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, nous noterons par $\hat{u}$ l'application définie dans $\mathbb{R}^n \times [t_1, t_2]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ par :

$\hat{u}(x, t) = u(x, t)$ pour tout (x, t) appartenant à $\overline{\Omega} \times [t_1, t_2]$

$\hat{u}(x, t) = 0$ pour (x, t) appartenant à $(\mathbb{R}^n - \overline{\Omega}) \times [t_1, t_2]$.

LEMME 1.1.1

Si u est lipschitzienne dans tout borné de $\overline{\Omega} \times [t_1, t_2]$,
si u est nulle sur $\Gamma \times [t_1, t_2]$,
alors $\hat{u}$ est lipschitzienne sur tout borné de $\mathbb{R}^n \times [t_1, t_2]$ de plus on a :

$D_i u = D_i \hat{u}$ presque partout dans $\Omega \times [t_1, t_2]$

$D_i \hat{u} = 0$ presque partout dans $(\mathbb{R}^n - \Omega) \times [t_1, t_2]$.

Démonstration du lemme

Montrons d'abord que $\hat{u}$ est lipschitzienne sur tout borné de $\mathbb{R}^n \times [t_1, t_2]$.

Soit B un borné de $\mathbb{R}^n \times [t_1, t_2]$. Alors $B \cap \bar{\Omega} \times [t_1, t_2]$ est un borné de $\bar{\Omega} \times [t_1, t_2]$. Il existe donc, d'après les hypothèses faites sur u, des constantes K_p telles que, pour tous points M_1 et M_2 distincts appartenant à $B \cap \bar{\Omega} \times [t_1, t_2]$, nous ayons :

$$\left| \frac{u_p(M_1) - u_p(M_2)}{|M_1 M_2|} \right| \leq K_p$$

où $|M_1 M_2|$ représente la distance dans $\mathbb{R}^{n+1}$ des points $M_1 M_2$.

Nous supposerons B convexe, ce qui n'enlèvera rien à la généralité car : tout borné de $\mathbb{R}^n \times [t_1, t_2]$ est contenu dans un borné convexe de $\mathbb{R}^n \times [t_1, t_2]$.

Soient M_1 et M_2 deux points distincts appartenant à B et considérons la quantité suivante :

$$\left| \frac{\hat{u}_p(M_1) - \hat{u}_p(M_2)}{|M_1 M_2|} \right| .$$

Trois cas particuliers peuvent se présenter.

Si M_1, M_2 appartiennent à $\Omega \times [t_1, t_2]$, nous avons :

$$\left| \frac{\hat{u}_p(M_1) - \hat{u}_p(M_2)}{|M_1 M_2|} \right| = \left| \frac{u_p(M_1) - u_p(M_2)}{|M_1 M_2|} \right| \leq K_p .$$

Si M_1, M_2 appartiennent à $(\mathbb{R}^n - \Omega) \times [t_1, t_2]$, nous avons :

$$\left| \frac{\hat{u}_p(M_1) - \hat{u}_p(M_2)}{|M_1 M_2|} \right| = 0 \leq K_p .$$

Si M_1 appartient à $(\mathbb{R}^n - \Omega) \times [t_1, t_2]$ et M_2 appartient à $\Omega \times [t_1, t_2]$, alors d'après la propriété des ouverts d'une droite, il existe $M_3 \neq M_2$ appartenant au segment M_1M_2 tel que M_3 appartienne à $\Gamma \times [t_1, t_2]$, nous avons alors :

$$\left| \frac{\hat{u}_p(M_1) - \hat{u}_p(M_2)}{|M_1 M_2|} \right| = \left| \frac{u_p(M_3) - u_p(M_2)}{|M_1 M_2|} \right| \leq \left| \frac{u_p(M_3) - u_p(M_2)}{|M_3 M_2|} \right| \leq K$$

Car $\hat{u}_p(M_1) = \hat{u}_p(M_3) = 0$ et que $|M_1M_2| \geq |M_3M_2|$.

Donc, nous avons dans tous les cas :

$$\left| \frac{\hat{u}_p(M_1) - \hat{u}_p(M_2)}{|M_1 M_2|} \right| \leq K_p ,$$

ce qui démontre que $\hat{u}$ est lipschitzienne dans tous borné de $\mathbb{R}^n \times [t_1, t_2]$.

Montrons maintenant la propriété des dérivées partielles de $\hat{u}$.

Comme u et $\hat{u}$ sont lipschitziennes, elles admettent presque partout des dérivées partielles.

Sur $\Omega \times]t_1, t_2[$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ on a: $u = \hat{u}$, ainsi que :

$D_i u = D_i \hat{u}$ en tout point où ces dérivées existent.

Donc sur $\Omega \times [t_1, t_2]$, nous avons :

$D_i u = D_i \hat{u}$ presque partout, car les ensembles $\Omega \times \{t_1\}$ et $\Omega \times \{t_2\}$ sont de mesure nulle dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sur $(\mathbb{R}^n - \Omega) \times]t_1, t_2[$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, nous avons :

$\hat{u} = 0$ ainsi que $D_i\hat{u} = 0$.

Comme $(\mathbb{R}^n - \bar{\Omega}) \times \{t_1\}$, $(\mathbb{R}^n - \bar{\Omega}) \times \{t_2\}$ sont des ensembles de mesure nulle, on a :

$D_i\hat{u} = 0$ presque partout dans $(\mathbb{R}^n - \Omega) \times [t_1, t_2]$.

Il reste à montrer que sur $\Gamma \times [t_1, t_2]$, $D_i\hat{u} = 0$ presque partout.

Deux cas se présentent :

- ou mesure de Γ dans $\mathbb{R}^n$ est nulle ,

- ou mesure de Γ dans $\mathbb{R}^n$ est différente de zéro.

Si mesure de Γ est nulle dans $\mathbb{R}^n$, alors la mesure de $\Gamma \times [t_1, t_2]$ est nulle dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et le lemme est démontré.

Supposons que la mesure de Γ soit différente de zéro dans $\mathbb{R}^n$.

Nous continuons la démonstration pour une valeur de t fixé appartenant à $[t_1, t_2]$.

Comme $\hat{u}$ est lipschitzienne dans tout borné de $\mathbb{R}^n \times [t_1, t_2]$, alors $\hat{u}$ est lipschitzienne dans tout borné de $\mathbb{R}^n \times \{t\}$. Dans $\mathbb{R}^n \times \{t\}$, $D_i\hat{u}$ existe presque partout pour la mesure de $\mathbb{R}^n$.

Soit Γ' le sous-ensemble de Γ tel que, en tout point de Γ', $D_i\hat{u}$ existe. Nous avons :

mesure de Γ' = mesure de Γ dans $\mathbb{R}^n$.

Définissons par :

H_i l'ensemble des x appartenant à $\mathbb{R}_n$ tel que $x_i = 0$,

x^i_y la parallèle à l'axe des x_i menée par le point y appartenant à H_i .

Montrons que sur $\Gamma' \cap X_j^i$, $D_i\hat{u}$ est nulle presque partout pour la mesure linéaire, mesure de $\mathbb{R}$.

Soit $P_o = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n, t)$ un point appartenant à $(\Gamma' \cap X_y^i) \times \{t\}$; nous noterons par :

P_h le point de $\mathbb{R}^n \times \{t\}$ de composante,

$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i+h, x_{i+1}, \ldots, x_n, t)$.

Etudions le rapport :

$$\frac{\hat{u}_k(P_h) - \hat{u}_k(P_o)}{h}$$

P_o P_1 P_h

Si P_h appartient à $(\mathbb{R}^n - \Omega) \times \{t\}$, le rapport précédent est nul.

Si P_h appartient à $\Omega \times \{t\}$, soit P_1 le point de Γ tel que , P_1 appartienne au segement $[P_o, P_h]$,

et $]P_1, P_h]$ soit contenu dans $\Omega \times \{t\}$.

D'après les propriétés d'un ouvert d'une droite , le point P_1 existe.

Nous avons :

$$\frac{\hat{u}_k(P_h) - \hat{u}_k(P_o)}{h} = \frac{u_k(P_h) - u_k(P_1)}{h} .$$

Comme u est lipschitzienne dans tout borné de $\overline{\Omega} \times [t_1, t_2]$, si on se limite aux points P_h appartenant à un borné de $\mathbb{R}^n \times \{t\}$

contenant P_o, nous avons :

$$| u_k(P_h) - u_k(P_1)| \leq K_k \quad |P_h - P_1| ,$$

où K_k est une constante positive. Nous avons donc :

$$\left| \frac{\hat{u}_k(P_h) - \hat{u}_k(P_o)}{h} \right| \leq K_k \frac{|P_h - P_1|}{|h|} .$$

Définition des points de densité :

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ mesurable, on dit qu'un point M appartenant à $\mathbb{R}$ est point de densité de E, si le rapport ,

$$\frac{\text{mes } E \cap [M-h_1, M+h_2]}{h_1+h_2}$$

tend vers un quand h_1 et h_2 tendent vers zéro, h_1 et h_2 étant strictement positifs.

Donc, si P_o est un point de densité de l'ensemble linéaire $(\Gamma' \cap X_j^i) \times \{t\}$, le rapport

$$\left| \frac{\hat{u}_k(P_h) - \hat{u}_k(P_o)}{h} \right| ,$$

tend vers zéro quand h tend vers zéro.

En conclusion, si P_o est un point de densité de $(\Gamma' \cap X_y^i) \times \{t\}$,

alors $D_i \hat{u}_k = 0$ en P_o .

THEOREME DE DENSITE DE LEBESGUE :

Dans un ensemble linéaire mesurable, presque tous les points de cet ensemble sont points de densité.

Donc $D_i\hat{u}_k = 0$ en presque tout point de $(\Gamma' \cap X_y^i) \times \{t\}$ pour la mesure de $\mathbb{R}$.

Soit X_y^i la fonction caractéristique de l'ensemble des points appartenant à $(\Gamma' \cap X_y^i) \times \{t\}$ tel que $D_i\hat{u}_k \neq 0$.

D'après le théorème de Fubini, la mesure de l'ensemble des points de $\Gamma' \times \{t\}$ tel que $D_i\hat{u}_k \neq 0$ est égale à ,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} X_y^i \, dx_i \right] dy_i$$

où dy_i est l'élément d'aire de H_i .

Comme $\int_{\mathbb{R}} X_y^i \, dx_i = 0$, la mesure de l'ensemble des points de Γ' tel que $D_i\hat{u}_k \neq 0$ est nulle dans $\mathbb{R}^n$, et par suite, si nous faisons varier t, l'ensemble des points de $\Gamma \times [t_1, t_2]$ tel que $D_i\hat{u}_k \neq 0$ est un ensemble de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n \times [t_1, t_2]$, ce qui démontre le lemme.

Remarque :

En réalité, nous avons démontré que pour tout t appartenant à $[t_1, t_2]$,

$D_iu = D_i\hat{u}$ presque partout dans $\Omega \times \{t\}$,

$D_i\hat{u} = 0$ presque partout dans $(\mathbb{R}^n - \Omega) \times \{t\}$, où le presque partout est pris dans le sens de la mesure de $\mathbb{R}^n$.

LEMME 1.1.2

Soit f une fonction définie dans $\overline{\Omega} \times [t_1, t_2]$, lipschitzienne sur tout borné

de $\overline{\Omega} \times [t_1, t_2]$ et nulle sur $\Gamma \times [t_1, t_2]$, alors nous avons pour tout t appartenant à $[t_1, t_2]$,

$$\int_{\omega_r} D_i f \, dx = \int_{B_r} D_i \hat{f} \, dx = \int_{S_r} \hat{f} \frac{x_i}{r} \, ds = \int f \frac{x_i}{r} \, ds \quad .$$

Démonstration :

En utilisant la remarque du lemme 1.1.1, et les hypothèses faites sur f, nous savons que $D_i\hat{f}$ est définie presque partout dans $\mathbb{R}^n \times \{t\}$ dans le sens de la mesure de $\mathbb{R}^n$ et que ,

$D_i\hat{f} = D_i f$ presque partout sur $\Omega \times \{t\}$

$D_i\hat{f} = 0$ presque partout sur $(\mathbb{R}^n - \Omega) \times \{t\}$ dans le sens de la mesure de $\mathbb{R}^n$.

Nous avons donc :

$$\int_{\omega_r} D_i f \, dx = \int_{B_r} D_i \hat{f} \, dx$$

De plus, nous savons que $\hat{f}$ est lipschitzienne dans tout borné de $\mathbb{R}^n \times \{t\}$, résultat du lemme 1.1.1.

Considérons l'intégrale :

$$\int_{B_r} D_i \hat{f} \, dx \quad .$$

Si nous notons :

B_r^i l'ensemble $B_r \cap$

et Ω_y^i l'ensemble $B_r \cap X_y^i$,

H_i et X_y^i étant définis comme pour le lemme 1.1.1, nous avons (Théorème de Fubini) :

$$\int_{B_r} D_i \hat{f}\, dx = \int_{B_r^i} \left[\int_{\Omega_y^i} D_i \hat{f}\, dx_i \right] dy_i \quad .$$

Comme $\hat{f}$ est lipschitzienne sur tout borné de $\mathbb{R}^n$, elle est absolument continue sur toutes parallèles aux axes, nous avons donc :

$$\int_{B_r} D_i \hat{f}\, dx = \int_{S_r} \hat{f}\, n_i\, ds = \int_{\sigma_r} f\, n_i\, ds$$

où ds est l'élément d'aire de S_r, $n = (n_i)$ est la normale extérieure à S_r, $n_i = \frac{x_i}{r}$. Ce qui démontre le lemme.

Revenons à la démonstration du corollaire . D'après les hypothèses faites sur ϕ , v, $\mathcal{P}_{i,p}(v)$, les fonctions

$\sum_p 2\phi^2 v_p \mathcal{P}_{i,p}(v)$ sont lipschitziennes sur tout borné de $\overline{\Omega} \times [t_1, t_2]$, elles sont nulles sur $\Gamma \times [t_1, t_2]$, nous pouvons donc utiliser le lemme 1.1.2, et nous avons :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \sum_{i,p} D_i \left[2\phi^2 v_p \mathcal{P}_{i,p}(v) \right] dx\, dt =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_r} \sum_{i,p} 2\phi^2 v_p \mathcal{P}_{i,p}(v) \frac{x_i}{r}\, ds\, dt \quad .$$

Ce qui démontre le corollaire.

§ 2 - CAS PARTICULIER N =1.

Nous allons, dans ce cas particulier N =1, obtenir de nouveaux résultats portant sur les parties positives et sur les parties négatives des solutions d'inéquations du type 1.1.1.

Définition 1.2

Soit v une fonction définie dans S à valeurs dans $\mathbb{R}$, nous définissons deux nouvelles fonctions notées v_+ et v_- , par :

$$v_+(x,t) = \max\left[0, v(x,t)\right]$$

$$v_-(x,t) = \max\left[0, -v(x,t)\right] \quad .$$

Hypothèses sur les opérateurs et les coefficients :

Ce sont les mêmes que pour le théorème 1.1.

Dans ce paragraphe, au lieu de noter les coefficients et les opérateurs par $\mathcal{G}_{i,1}$, $\alpha_{p,1}$, nous les noterons par :

$\mathcal{G}_{i,\alpha}$.

THEOREME 1.2

Soit v appartenant à $C^{1,2}(S)$ vérifiant :
$v_+(x,t) = 0$ pour (x,t) appartenant à $\Gamma \times [0,T]$
v solution de l'inéquation suivante :

1.2.1 $-2\, v L v \leq c_1 v^2 + \mu \sum_i D_i v\, \mathcal{P}_i(v)$ pour tout (x, t) appartenant à $\Omega \times [0, T]$ où c_1 appartient à C(S) et μ une constante positive inférieure à 2.

Soit ϕ une fonction définie dans $\mathbb{R}_+ \times [t_1, t_2]$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, où (t_1, t_2) vérifie $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, vérifiant 1.1.2, 1.1.4, 1.1.5.

Si ϕ et v vérifient la condition suivante : pour tout (τ_1, τ_2) vérifiant $t_1 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq t_2$, il existe une suite r_m tendant vers l'infini et une suite R_m tendant vers zéro, telles que :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_{r_m}} \sum_i D_i \left[\phi^2 v_+ \mathcal{P}_i(v)\right] dx\, dt \leq R_m ,$$

alors,

1) la fonction à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie par

$\int_\Omega \phi^2 \alpha\, v_+^2\, dx$, est une fonction décroissante de t pour t appartenant à $[t_1, t_2]$.

2) Si il existe t_3 appartenant à $[t_1, t_2]$ tel que,

$\int_\Omega \phi^2 \alpha\, v_+^2\, dx < +\infty$ pour $t = t_3$, alors,

$\int_\Omega \phi^2 \alpha\, v_+^2\, dx$ est fini pour tout t appartenant à $[t_3, t_2]$

et

$$\int_{t_3}^{t_2} \int_\Omega \left[-\phi \phi_t G v_+^2 + \phi^2 \sum D_i v_+ \mathcal{P}_i(v)\right] dx\, dt < +\infty$$

Remarque : Nous pouvons faire les mêmes remarques que remarques : 1.1.1 et 1.1.2.

Démonstration

Si nous utilisons l'inéquation 1.1.9 et l'hypothèse que v est solution de 1.2.1, on a :

$$1.2.3 \quad \begin{cases} \left[-2\phi\phi_t G - \phi^2 H - \phi^2 c_1 - 4K_0 \lambda' \phi^2_{|x|} F \right] v^2 \\ + 2\phi^2 \left[1 - \frac{2K_0}{\lambda'} - \mu \right] \sum_i D_i v \, \mathcal{S}_i(v) \leq \\ \leq \sum_i D_i \left[2\phi^2 v \, \mathcal{S}_i(v) \right] - D_t \left[\phi^2 \alpha v^2 \right] \end{cases}$$

Pour la suite de la démonstration, nous allons utiliser le lemme suivant :

LEMME 1.2

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit f une fonction appartenant à $C^1(\bar{\Omega})$. On a les résultats suivants :

1) la fonction f_+ admet presque partout dans Ω des dérivées partielles et, si on appelle Ω_1 l'ensemble des points x de Ω tel que $f(x) > 0$ et Ω_2 l'ensemble des points x de Ω où $f(x) \leq 0$, on a :

les restrictions à Ω_1 de $D_i f_+$ et de $D_i f$ sont égales,

la restriction à Ω_2 de $D_i f_+$ est nulle presque partout ;

2) la fonction f_+ est lipschitzienne sur tout borné de $\overline{\Omega}$.

Démonstration

L'ensemble Ω_1 est un ouvert. Nous avons donc :

les restrictions à Ω_1 des fonctions f_+ et f sont égales, et les restrictions à Ω_1 de $D_i f_+$ et $D_i f$ sont elles aussi égales.

Montrons que sur Ω_2, f_+ admet presque partout des dérivées partielles qui sont nulles.

Soit P_o de composantes $(x_1, \ldots, x_n)$ un point de Ω_2 et considérons la droite $\Delta(P_o, i)$ passant par P_o et parallèle à l'axe des x_i. Notons par :

$\Omega(P_o, i)$ l'ensemble $\Omega \cap \Delta(P_o, i)$
$\Omega_1(P_o, i)$ l'ensemble $\Omega_1 \cap \Delta(P_o, i)$
$\Omega_2(P_o, i)$ l'ensemble $\Omega_2 \cap \Delta(P_o, i)$.

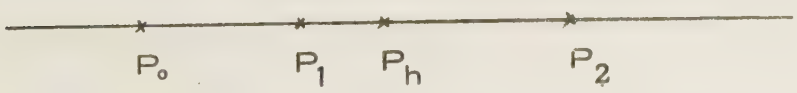
Soit P_h un point de $\Omega(P_o, i)$ de composantes $(x_1, \ldots x_{i-1} x_i+h, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ et étudions le rapport :

$$\frac{f_+(P_h) - f_+(P_o)}{h}$$

Si P_h appartient à $\Omega_2(P_o, i)$ le rapport précédent est nul (numérateur nul).

Si P_h appartient à $\Omega_1(P_o, i)$, on a : $\Omega_1(P_o, i)$ est un ouvert de $\Omega(P_o, i)$.

Soit (P_1, P_2) le plus grand intervalle ouvert contenant P_h et contenu dans $\Omega_1(P_o, i)$. On supposera que P_1 se trouve entre P_o et P_h :



Comme f appartient à $C^1(\overline{\Omega})$, on a :

$|f(P_h) - f(P_1)| \leq M |P_h - P_o|$ où M est un majorant de $|D_i f|$ quand on se limite à un borné de $\overline{\Omega}$, ce borné contenant les points P_1 et P_h. Comme $\Omega(P_o, i)$ est un ouvert, on pourra toujours prendre P_h suffisamment proche de P_o, de telle sorte que le segment $[P_o, P_h]$ soit inclus dans Ω, c'est-à-dire que P_1 n'appartienne pas à la frontière de Ω. On a donc pour tout point P_o appartenant à Ω_2, et pour P_h appartenant à $\Omega_1(P_o, i)$

$$\left| \frac{f_+(P_h) - f_+(P_o)}{h} \right| = \left| \frac{f_+(P_h) - f_+(P_1)}{h} \right| = \left| \frac{f(P_h) - f(P_1)}{h} \right| \leq M \frac{|P_h - P_1|}{|h|}$$

car $f_+(P_o) = f_+(P_1) = 0 = f(P_1)$.

Si P_o est un point de densité de $\Omega_2(P_o, i)$, nous savons que ce rapport tend vers zéro quand $|h|$ tend vers zéro. En conclusion, si P_o est un point de densité de $\Omega_2(P_o, i)$, alors $D_i f_+$ existe et on a $D_i f_+ = 0$ en P_o.

D'après le théorème de densité de Lebesgue, presque tous les points de $\Omega_2(P_o, i)$ sont points de densité. Donc en presque tout point de $\Omega_2(P_o, i)$ $D_i f_+ = 0$. En utilisant le théorème de Fubini, on en déduit que, en presque tout point de Ω_2, $D_i f_+ = 0$, ce qui démontre la première partie du lemme.

La deuxième partie du lemme est évidente, il suffit pour cela de remarquer que tout x, y appartenant à $\overline{\Omega}$, on a :

$$|f_+(x) - f_+(y)| \leq |f(x) - f(y)|$$

et que, de plus, comme f appartient à $C^1(\overline{\Omega})$, alors f est lipschitzienne sur tout borné de $\overline{\Omega}$.

Revenons à la démonstration du théorème. Posons, comme dans la démonstration du théorème 1.1

$\lambda' = \frac{8K_0}{2-\mu}$. Comme ϕ vérifie 1.1.5, l'inégalité 1.2.3 entraîne l'inégalité suivante :

$$- \phi\phi_t G v^2 + \frac{2-\mu}{2} \phi^2 \sum_i D_i v \mathcal{P}_i(v)$$

1.2.4

$$\leq \sum_i D_i \left[2 \phi^2 v \mathcal{P}_i(v) \right] - D_t \left[\phi^2 \alpha v^2 \right] .$$

Montrons alors que, presque partout dans $\Omega \times \left[t_1, t_2\right]$ nous avons :

$$- \phi\phi_t G v_+^2 + \frac{2-\mu}{2} \phi^2 \sum_i D_i v_+ \mathcal{P}_i(v) \leq$$

1.2.5

$$\leq \sum_i D_i \left[2 \phi^2 v_+ \mathcal{P}_i(v) \right] - D_t \left[\phi^2 \alpha v_+^2 \right] .$$

En effet, les quantités qui interviennent dans 1.2.5 sont bien définies en presque tout point de $\Omega \times \left[t_1, t_2\right]$ d'après le lemme 1.1.2 qu'on utilise en considérant l'ouvert $\Omega \times \left]0, T\right[$. De plus, si on note par S_1 l'ensemble des (x, t) appartenant à $\Omega \times \left[t_1, t_2\right]$ tel que $v(x, t) > 0$, d'après le lemme précédent, 1.2.5 n'est autre que 1.2.4 presque partout ; si on note par S_2 l'ensemble des (x, t) appartenant à $\Omega \times \left[t_1, t_2\right]$ tel que $v(x, t) < 0$, alors sur S_2 1.2.5 est vraie presque partout car les deux membres de l'inégalité sont nuls presque partout.

Intégrons 1.2.5 sur $\omega_r \times \left[\tau_1, \tau_2\right]$ où τ_1, τ_2 vérifie $t_1 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq t_2$, on obtient :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \left[- \phi \phi_t G v_+^2 + \frac{2-\mu}{2} \phi^2 \sum_i D_i v_+ \mathcal{P}_i(v) \right] dx\, dt \leq$$

1.2.6

$$\leq \sum_i \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \left[D_i \left[2 \phi^2 v_+ \mathcal{P}_i(v) \right] \right] - D_t \left[\phi^2 \alpha v_+^2 \right] dx\, dt \ .$$

Considérons la quantité $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} D_t \left[\phi^2 \alpha v_+^2 \right] dx\, dt$.

D'après les hypothèses faites sur ϕ, α , v et le lemme 1.2, la fonction $\phi^2 \alpha v_+^2$ est absolument continue sur tout segment parallèle à l'axe des t contenu dans $\overline{\Omega} \times \left[t_1, t_2 \right]$.

D'après le théorème de Fubini et la propriété que $\phi^2 \alpha v_+^2$ est absolument continue, on a :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} D_t \left[\phi^2 \alpha v_+^2 \right] dx\, dt = \int_{\omega_r} \int_{\tau_1}^{\tau_2} D_t \left[\phi^2 \alpha v_+^2 \right] dx\, dt =$$

$$= \left[\int_{\omega_r} \phi^2 \alpha v_+^2 \, dx \right]_{t=\tau_2} - \left[\int_{\omega_r} \phi^2 \alpha v_+^2 \, dx \right]_{t=\tau_1} .$$

Si on considère 1.2.6, où $r = r_m$ et si on utilise l'hypothèse 1.2.2, on a :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_{r_m}} \left[-\phi \phi_t G v_+^2 + \frac{2-\mu}{2} \phi^2 \sum_i D_i v_+ \mathcal{P}_i(v) \right] dx\, dt \leq$$

1.2.7

$$\leq R_m + \left[\int_{\omega_{r_m}} \phi^2 \alpha v_+^2 \, dx \right]_{t=\tau_1} - \left[\int_{\omega_{r_m}} \phi^2 \alpha v_+^2 \, dx \right]_{t=\tau_2} .$$

En remarquant que la quantité $\sum_i D_i \; v_+ \mathcal{F}_i(v)$ est positive ou nulle presque partout dans $\Omega \times [0, T]$, que ϕ_t est négative ou nulle, on a :

$$0 \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \left[-\phi \phi_t \; G \; v_+^2 + \frac{2-\mu}{2} \; \phi^2 \; \sum_i D_i v_+ \mathcal{F}_i(v) \right] dx \; dt$$

est une fonction croissante de r. Donc, on a :

$$\lim_{m \to +\infty} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_{r_m}} \left[-\phi \phi_t \; G \, v_+^2 + \frac{2-\mu}{2} \; \phi^2 \; \sum_i D_i v_+ \mathcal{F}_i(v) \right] dx \; dt =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \left[-\phi \phi_t \, G \, v_+^2 + \frac{2-\mu}{2} \; \phi^2 \; \sum_i D_i v_+ \mathcal{F}_i(v) \right] dx \; dt \quad .$$

De même,

$$\lim_{m \to +\infty} \int_{\omega_{r_m}} \phi^2 \; \alpha \; v_+^2 \; dx = \int_{\Omega} \phi^2 \; \alpha \, v_+^2 \; dx \quad \text{pour tout } t$$

appartenant à $[t_1, t_2]$; ces limites étant prises dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Donc si dans 1.2.7 on fait tendre m vers l'infini, à la limite, nous avons :

$$0 \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \left[-\phi \phi_t \; G \, v_+^2 + \frac{2-\mu}{2} \, \phi^2 \; \sum_i D_i v_+ \mathcal{F}_i(v) \right] dx \; dt \leq$$

$$\leq \left[\int_{\Omega} \phi^2 \; \alpha \, v_+^2 \; dx \right]_{t=\tau_1} - \left[\int_{\Omega} \phi^2 \; \alpha \; v_+^2 \; dx \right]_{t=\tau_2}$$

La suite de la démonstration est identique à celle du théorème 1.1.

Comme pour le théorème 1.1, nous obtenons un corollaire du théorème 1.2.

Les hypothèses faites sur les opérateurs et coefficients sont les mêmes que pour le corollaire 1.1.

Corollaire 1.2

Le théorème 1.2 reste valable si on remplace 1.1.2 et 1.2.2 par :

1.1.2') ϕ est lipschitzienne dans tout borné de $\mathbb{R}_+ \times [t_1, t_2]$,

1.2.2') ϕ et v vérifient la condition suivante :
pour tout (τ_1, τ_2) $t_1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_2$, il existe une suite r_m tendant vers l'infini et une suite R_m tendant vers zéro, telles que :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_{r_m}} \sum_i 2\phi^2 \frac{x_i}{r_m} v_+ \mathcal{G}_i(v)\, ds dt \leqslant R_m$$

Démonstration Elle est identique à celle du corollaire 1.1.
Il suffit ici de démontrer que :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \sum_i D_i \left[2\phi^2 v_+ \mathcal{G}_i(v) \right] dx dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_r} \sum_i 2\phi^2 v_+ \mathcal{G}_i(v) \frac{x_i}{r}\, ds\, dt$$

D'après les propriétés de ϕ , de v et les résultats du lemme 1.2, on peut appliquer le lemme 1.1.2 à la fonction :

$$f = 2\phi^2 v_+ \mathcal{G}_i(v) \quad ,$$

qui entraine l'égalité précédente, d'où le corollaire.

II - CAS LINEAIRE.

Dans ce chapitre, nous étudions le cas particulier d'un opérateur linéaire :

$$L_1 \; u = \left\{ \sum_{i,j,k} D_i \left[a^p_{ijk} \; D_j \; u_k \right] - \sum_k D_t \left[\alpha_{p,k} \; u_k \right] \right.$$

Ici, les opérateurs $\mathcal{P}_{i,p}$ sont définis par :
pour tout u appartenant à $\left[C^1(S)\right]^N$, nous avons

$$\mathcal{P}_{i,p}(u) = \sum_{j,k} a^p_{ijk} \, D_j u_k \; ,$$

où a^p_{ijk} appartient à $C^1(S)$.

Suivant l'ordre de croissance des coefficients qui interviennent dans L_1, nous déterminerons des fonctions poids qui vérifieront les propriétés demandées dans le théorème 1.1. De plus, nous déterminerons un ensemble K, de telle sorte que, si nous cherchons les solutions de l'inéquation dans K, nous serons assurés que la condition 1.1.2' est bien vérifiée.

Hypothèses sur les coefficients :

a) a^p_{ijk} appartient à $C^1(S)$;

b) Il existe une constante K_o positive, telle que, pour tout $\xi = (\xi^p_i)$, $\beta = (\beta^p_i)$ appartenant à $\mathbb{R}^{nxN}$, pour tout u appartenant à $\left[C^{1,2}(S)\right]^N$, on ait :

$$\sum_{i,j,k,p} a^p_{ijk}\ \xi^p_i\ \beta^k_j \leq K_o \left[\lambda F \sum_{i,p} (\xi^p_i)^2 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i,p} a^p_{ijk}\ \beta^p_i\ \beta^k_j \right]$$

et ceci pour tout λ réel strictement positif, où F est une fonction positive définie dans S;

c) $\left| D_j\ a^p_{ijk} \right| \leq F_1$ où F_1 appartient à C(S) ;

d) pour tout i,j,p,k on a :

$$a^k_{ijp} = a^p_{ijk}$$

e) $\alpha_{p,k}$ vérifie les hypothèses iii, iv̈, v̈ ;

f) pour tout v appartenant à $\left[C^{1,2}(S)\right]^N$, on a :

$$\sum_{p,k} \alpha_{p,k}\ v_p\ v_k \leq G_1\ v^2 \ ,$$

où G_1 appartient à C(S).

§ 1 - DEFINITION :

Soit Ψ une fonction définie dans $\mathbb{R}^n$ x $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$; On appelle K_Ψ l'ensemble des applications v appartenant à $\left[C^{1,2}(S)\right]^N$, vérifiant les propriétés suivantes :

1) v(x,t) = 0 pour (x,t) appartenant à Γ x $[0,T]$,

2) Ψv_p appartient à $L^2(S)$ pour tout p.

Remarque : la fonction Ψ peut être définie aussi dans S seul.

Dans ce qui suit, nous étudierons trois cas particuliers suivant l'ordre de croissance des coefficients.

Nous dirons que v est solution du problème A, si v vérifie :

A $\left\{\right.$ pour tout r supérieur ou égal à r_o (r_o constante positive donnée) et pour tout t appartenant à $[0,T]$:

$$\int_{\omega_r} - 2v\, L_1 v\, dx \leq \int_{\omega_r} \left[c_1\, v^2 + \mu \sum_{i,j,k,p} a^p_{ijk}\, D_i\, v_p\, D_j\, v_k \right] dx$$

où, c_1 appartient à C(S) et μ est une constante positive ou nulle inférieure à 2.

THEOREME 2.1.1.

Soient F, F_1, G, G_1, H, c_1 vérifiant :

$$G_1(x,t) \leq K_1 \left[\exp \; m_o |x|^{2-\lambda} \right],$$

$$\frac{F(x,t)}{G(x,t)} \leq K_1 \, (1 + |x|)^{\lambda},$$

$$\frac{H(x,t)}{G(x,t)} \leq K_1 \, (1 + |x|)^{2-\lambda},$$

$$\frac{c_1(x,t)}{G(x,t)} \leq K_1 \, (1 + |x|)^{2-\lambda},$$

$$\frac{F_1(x,t)}{G(x,t)} \leq K_1 \exp \left[m_o \, (1 + |x|)^{2-\lambda} \right],$$

où, m_o et K_1 sont des constantes positives et λ une constante positive ou nulle inférieure à 2.

Soit la fonction Ψ définie dans $\mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et par (m_1 étant une constante positive) :

$$(x,t) \longrightarrow \Psi(x,t) = \exp - m_1 |x|^{2-\lambda}$$

Soit v appartenant à K_Ψ , v solution du problème A.

Alors, si on définit la fonction $\phi_{m,\beta,\tau}$ par :

$$(x,t) \longrightarrow \phi_{m,\beta,\tau}(x,t) = \exp - \frac{m(1+|y|)^{2-\lambda}}{\beta - (t-\tau)}$$

définie dans $\mathbb{R}^n \times \left[\tau, \tau+\frac{\beta}{2}\right]$, où $|y| = \max(r_o, |x|)$,

m et β ($\beta<1$) des constantes positives, il existe deux constantes positives β_1, β_2 indépendantes de τ telles que, si $m < \beta_1$ et $\frac{m}{\beta} > \beta_2$, on ait :

1) $\int_\Omega \sum_{p,k} \phi^2_{m,\beta,\tau}\, \alpha_{p,k}\, v_p\, v_k \, dx$ fonction décroissante de t pour tout t appartenant à $\left[\tau, \tau+\frac{\beta}{2}\right] \cap \left[0,T\right]$ et ceci pour tout τ

2) $\int_\Omega \sum_{p,k} \phi^2_{m,\beta,\tau}\,(x,\tau_1)\, \alpha_{p,k}\, v_p\, v_k \, dx$ finie pour tout t appartenant à $]0,T[$ et tout τ_1 vérifiant

$$0 < \tau_1 - \tau < \frac{\beta}{2}$$

3) $\phi^2_{m,\beta,\tau}\,(x,\tau_1) \sum_{i,j,k,p} a^p_{ijk}\, D_i\, V_p\, D_j\, V_k$ appartenant à $L^1(\Omega \times [\tau_2, T])$ où $\tau_2 > 0$ et $0 < \tau_1 - \tau < \frac{\beta}{2}$.

Démonstration .

Nous allons démontrer que les hypothèses du corollaire 1.1. sont vérifiées.

D'après les hypothèses faites sur les a^{p}_{ipk} , les opérateurs $\mathcal{P}_{i,p}(v) = \sum_{j,k} a^{p}_{ipk} D_j v_k$ vérifient i' et ii. D'autre part, les $\alpha_{p,k}$, par hypothèse, vérifient iii, iv, v.

Dire que v est solution du problème A, c'est dire que v est solution d'une inéquation du type 1.1.1.

D'après la définition de $\phi_{m,\beta,\tau}$, cette fonction vérifie 1.1.2', 1.1.3, 1.1.4.

Il faut vérifier que $\phi_{m,\beta,\tau}$ est solution de 1.1.5. On doit avoir

si $|x| \leq r_o$

$$\frac{m(1 + |y|)^{2-\lambda}}{[\beta - (t-\tau)]^2} \; G - H - c_1 \geq 0$$

si $|x| > r_o$,

$$\frac{m(1 + |y|)^{2-\lambda}}{[\beta - (t-\tau)]^2} \; G - H - c_1 - \frac{32\, K_o}{2-\mu} \; \frac{m^2 (2-\lambda)^2 (1+|y|)^{2-2\lambda}}{[\beta - (t-\tau)]^2} \; F \geq 0.$$

Si on divise par G et si on utilise les hypothèses faites sur F,G,H,c_1, les inéquations précédentes sont entraînées si :

$$\frac{m}{[\beta - (t-\tau)]^2} - 2\, K_1 \geq 0 \quad \text{et}$$

$$\frac{m}{[\beta - (t-\tau)]^2} - 2\, K_1 - K_1 \; \frac{32\, K_o}{2-\mu} \; \frac{m^2 (2 - \quad}{[\beta - (t-\tau)]^2} \geq 0$$

Comme t est toujours supérieur ou égal à τ , les inégalités précédentes sont entraînées si :

$$\frac{m}{2\beta^2} \geq 2K_1$$

et

$$\frac{m}{2} - K_1 \frac{32\ K_o}{2-\mu} m^2(2-\lambda)^2 \geq 0 .$$

Donc $\phi_{m,\beta,\tau}$ est solution de 1.1.5. si :

$$\frac{m}{\beta^2} \geq 4K_1 \quad \text{et} \quad m \leq \frac{2-\mu}{64K_oK_1(2-\lambda)^2} = \beta_1 .$$

Il reste à démontrer 1.1.6'. Nous allons d'abord démontrer un lemme utile à la démonstration et qui servira par la suite.

LEMME 2.1.1.

Soient $F_{j,p,k}$ des fonctions appartenant à $C^1(\overline{\Omega} \times [t_1,t_2])$

où t_1, t_2 vérifient $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$.

On suppose que les fonctions $F_{j,p,k}$ vérifient la propriété suivante :

$$F_{j,p,k} = F_{j,k,p} .$$

Soit v appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, v nulle sur $\Gamma \times [0,T]$,

Si $\sum_{j,p,k} \frac{x_j}{|x|} F_{j,p,k}\ v_p\ v_k$ et $\sum_{j,p,k} v_p\ v_k\ D_j(F_{jpk})$

appartiennent à $L^1(\overline{\Omega} \times [t_1,t_2])$,

alors, pour tout τ_1, τ_2 vérifiant $t_1 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq t_2$, pour

toute constante positive R donnée, il existe une suite r_m tendant vers l'infini, telle que :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_{r_m}} \sum_{j,p,k} 2\, F_{jpk}\ v_p\ D_j\ v_k\ d\,s\ dt \leq R.$$

Démonstration.

Soit,

$$I(\rho) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_\rho} \sum_{j,p,k} 2F_{jpk}\ v_p\ D_j\ v_k\ dx\ dt.$$

D'après la propriété que $F_{jpk} = F_{jkp}$ on a :

$$2F_{jpk}\ v_p\ D_j[v_k] = F_{jpk}\ D_j[v_p\ v_k] = D_j[F_{jkp}\ v_p\ v_k] - v_p\ v_k\ D_j(F_{jpk})$$

On a donc :

$$I(\rho) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_\rho} \sum_{j,k,p} D_j\left[F_{jkp}\ v_p\ v_k\right] dx\ dt -$$

$$- \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_\rho} \sum_{j,k,p} v_p\ v_k\ D_j(F_{jpk})\ dx\ dt.$$

D'après les hypothèses faites sur F_{jpk}, les fonctions $F_{jpk}\ v_p\ v_k$ sont lipschitziennes sur tout borné de $\bar{\Omega}$, de plus, elles sont nulles sur la frontière de Ω , on peut donc utiliser le lemme 1.1.2. De plus, par hypothèse, la dernière intégrale est convergente quand ρ tend vers l'infini, on a donc ;

$$I(\rho) \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_\rho} \sum_{j,p,k} \frac{x_j}{\rho} \; F_{jpk} \; v_p \; v_k \; ds \; dt + R_1,$$

où R_1 est une constante indépendante de ρ.

Posons :

$$J(\rho) = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_\rho} \sum_{j,k,\rho} \frac{x_j}{\rho} \; F_{jpk} \; v_p \; v_k \; ds \; dt.$$

On a :

$$J(\rho) \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_\rho} \left| \sum_{jkp} \frac{x_j}{\rho} \; F_{jkp} \; v_p \; v_k \right| ds \; dt = J_1(\rho).$$

D'après les hypothèses du lemme, on sait que :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_\rho} \left| \sum_{j,k,p} \frac{x_j}{|x|} \; F_{jpk} \; v_p \; v_k \right| dx \; dt = \int_0^\infty J_1(u) \; du$$

est convergente quand ρ tend vers l'infini. La fonction $J_1(u)$ étant positive, l'ensemble des u tel que $J_1(u) > R_2 > 0$ (R_2 constante fixée), est de mesure finie dans $[0 + \infty[$.

Donc il existe une suite réelle croissante $(\rho_m)_{m \in N}$ tendant vers l'infini telle que :

$$J_1(\rho_m) \leq R_2$$

D'où :

$$I(\rho_m) \leq R_1 + R_2.$$

Mais :

$$I(\rho_m) = \int_0^{\rho_m}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_\rho} \sum_{j,p,k} 2 \; F_{jpk} \; v_p \; D_j \; v_k \; ds \; dt \; d\rho =$$

$$= \int_0^{\rho_m} I_1(\rho)\, d\rho.$$

Montrons que, pour tout ρ_m, il existe r_m supérieur ou égal à ρ_m tel que :

$$I_1(r_m) \leqslant R$$

R constante positive donnée.

En effet, supposons que :

$I_1(\rho) > R$ pour tout ρ supérieur ou égal à ρ_m.

Alors, pour tout m' supérieur à m, on aurait :

$$I(\rho_{m'}) = I(\rho_m) + \int_{\rho_m}^{\rho_{m'}} I_1(s)\, ds \geqslant I(\rho_m) + (\rho_{m'} - \rho_m)\, R.$$

Comme $\rho_{m'}$ tend vers l'infini quand m' tend vers l'infini, alors $I(\rho_{m'})$ tend vers l'infini, ce qui est contraire à :

$$I(\rho_m) \leqslant R_1 + R_2 \text{ pour tout m.}$$

Donc, quitte à extraire une sous-suite, il existe une suite monotone $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini telle que :

$I_1(r_m) \leqslant R$, ce qui démontre le lemme.

Revenons à la démonstration de 1.1.6'.

Posons :

$$F_{j,p,k} = \phi^2_{m,\beta,\tau} \sum_i x_i \, a^p_{ijk} .$$

D'après l'hypothèse $a^p_{ijk} = a^k_{ijp}$ on a bien :

$$F_{j,p,k} = F_{j,k,p}.$$

De plus, si on considère l'hypothèse ii, où $\lambda = 2$ et $\xi^p_i = \beta^p_i$, on obtient dans ce cas particulier :

$$0 \leq \sum_{i,j,k,p} a^p_{ijk}\ \xi^p_i\ \xi^k_j \leq 4\ K_o\ F \sum_{i,p} (\xi^p_i)^2 .$$

Donc, si on pose, $\xi^p_\ell = x_\ell\ v_p$, on a :

$$0 \leq \sum_{j,p,k} \frac{x_j}{|x|} F_{j\,p\,k}\ v_p\ v_k = \phi^2_{m,\beta,\tau} \sum_{i,j,p,k} \frac{1}{|x|}\ a^p_{ijk}\ x_i v_p x_j v_k \leq$$

$$\leq 4\ K_o\ F\ |x|\ \phi^2_{m,\beta,\tau}\ v^2 .$$

D'après la définition de $\phi_{m,\beta,\tau}$ et les hypothèses faites sur les coefficients de L_1, on a :

$$0 \leq \sum_{j,p,k} \frac{x_j}{|x|} F_{jpk}\ v_p\ v_k \leq$$

$$\leq 4\ K_o\ K_1^2\ |x|\ (1+|x|)^\lambda \exp.\left[\left(-\frac{2m}{\beta} + m_o\right)(1+|y|)^{2-\lambda}\right] v^2 .$$

De plus,

$$\sum_{j,p,k} v_p\ v_k\ D_j(F_{jpk}) = \sum_{i,j,p,k} v_p\ v_k\ D_j(x_i\ a^p_{ijk}\ \phi^2_{m,\beta,\tau}) =$$

$$= \sum_{i,j,p,k} v_p\ v_k\ \delta_{ij}\ a^p_{ijk}\ \phi^2_{m,\beta,\tau} + \sum_{i,j,p,k} v_p v_k x_i D_j(a^p_{ijk})\phi^2_{m,\beta,\tau} +$$

$$+ \sum_{i,j,p,k} v_p\ v_k\ x_i\ a^p_{ijk}\ D_j\left[\phi^2_{m,\beta,\tau}\right].$$

Etudions chaque terme du deuxième membre :

$$\left| \sum_{i,j,p,k} \delta_{ij}\ a^p_{ijk}\ v_p\ v_k\ \phi^2_{m,\beta,\tau} \right| \leq 4\ K_o\ n\ F\ \phi^2_{m,\beta,\tau}\ v^2 ,$$

$$\left| \sum_{i,j,p,k} v_p v_k x_i D_j (a^p_{ijk}) \phi^2_{m,\beta,\tau} \right| \leq n^2 N^2 K_1^2 |x| \exp.\left[2m_o |x|^{2-\lambda}\right] \ldots$$

$$\ldots \phi^2_{m,\beta,\tau} v^2 ,$$

$$\sum_{i,j,p,k} D_j (\phi^2_{m,\beta,\tau}) v_p v_k x_i a^p_{ijk} = - \sum_{i,j,p,k} 2\phi^2_{m,\beta,\tau} \frac{m(2-\lambda)(1+|y|)^{1-\lambda}}{\beta - (t-\tau)} \ldots$$

$$\ldots \frac{x_j}{|x|} v_p v_k x_i a^p_{ijk} ,$$

$$\left| \sum_{i,j,p,k} D_j (\phi^2_{m,\beta,\tau}) v_p v_k x_i a^p_{ijk} \right| \leq \frac{8m}{\beta} (1+|y|)^{1-\lambda} |x| v^2 F.$$

On a donc :

$$\left| \sum_{j,p,k} v_p v_k D_j F_{jpk} \right| \leq \left[4 K_o n K_1^2 (1+|x|)^{\lambda} + n^2 N^2 K_1^2 |x| + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{8m}{\beta} K_1^2 |x| (1+|y|) \right] \exp.\left(- \frac{2m}{\beta} + 2m_o\right)(1+|y|)^{2-\lambda}.$$

Nous remarquons que si $\frac{2m}{\beta} > 2m_o + m_1$, alors les F_{jkp} vérifient les hypothèses demandées dans le lemme 2.1.1.

Donc :

Pour tout τ_1, τ_2 vérifiant

$$t_1 = \max (0, \tau) \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq t_2 = \min (T, \tau + \frac{\beta}{2}),$$

Il existe une suite $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini et une suite $(R_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ($R_m = \frac{R}{r_m}$) tendant vers zéro, telles que :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_{r_m}} \sum_{i,j,k,p} 2\phi^2_{m,\beta,\tau} \frac{x_i}{r_m} a^p_{ijk} v_p D_j v_k \, ds \, dt \leq R_m.$$

On peut donc utiliser le corollaire 1.1. pour $m < \beta_1$ et

$\frac{m}{\beta} > \beta_2 = \max \left(4 K_1, \frac{2m_o + m_1}{2} \right)$.

On en déduit que :

1) $\int_\Omega \sum_{p,k} \phi^2_{m,\beta,\tau}\ \alpha_{p,k}\ v_p\ v_k\ dx$ est une fonction décroissante de t pour t appartenant au segment $\left[\tau, \tau + \frac{\beta}{2}\right] \cap \left[0, T\right]$.

2) Supposons que :

$$\int_\Omega \sum_{p,k} \phi^2_{m,\beta,\tau}\ (x, \tau_1)\ \alpha_{p,k}\ v_p\ v_k\ dx = +\infty \text{ pour tout } t = t_3$$

appartenant à $]0, T]$ et pour τ_1 appartenant à $]\tau, \tau + \frac{\beta}{2}]$.

On en déduit que :

$$\int_\Omega \sum_{p,k} \phi^2_{m,\beta,\, t_3 - \tau_1 + \tau}\ \alpha_{p,k}\ v_p\ v_k\ dx = +\infty \text{ pour } t = t_3$$

Donc, d'après ce qui vient d'être démontré :

$$\int_\Omega \sum_{p,k} \phi^2_{m,\beta,\, t_3 - \tau_1 + \tau} \alpha_{p,k}\ v_p\ v_k\ dx = +\infty \text{ pour tout t tel que :}$$

$\max(0,\ t_3 - \tau_1 + \tau) \leqslant t \leqslant t_3$. Ce qui entraînerait d'après le choix des paramétres que v n'appartient pas à K_ψ, contraire à l'hypothèse ; d'où la conclusion 2 du théorème.

3) Soient τ et τ_1 donnés vérifiant :

$$0 < \tau_1 - \tau < \frac{\beta}{2} .$$

Soient t_3 et t_4 appartenant à $]0, T]$ vérifiant :

$$t_4 - t_3 = \tau_1 - \tau .$$

D'après les résultats du corollaire 1.1., on a :

$$\int_{t_3}^{t_4} \int_\Omega \phi_{m,\beta,\tau+t_4-\tau_1}(x, t_4) \sum_{i,j,k,p} a^p_{ijk} D_i\, v_p\, D_j\, v_k\ dx\ dt < +\infty$$

Comme pour tout t appartenant au segment $[t_3\ \ t_4]$ on a :

$$\phi_{m,\beta,\tau+t_4-\tau_1}(x, t) \geq \phi_{m,\beta,\tau+t_4-\tau_1}(x, t_4)$$

et comme la quantité $\sum_{i,j,k,p} a^{p}_{ijk} D_i v_p \cdot D_j v_k$ est positive,

On a aussi :

$$\int_{t_3}^{t_4} \int_{\Omega} \phi_{m,\beta,\tau+t_4-\tau_1}(x,t_4) \sum_{i,j,k,p} a^{p}_{ijk} D_i v_p D_j v_k \, dx \, dt < +\infty$$

Comme $\phi_{m,\beta,\tau+t_4-\tau_1}(x,t_4) = \phi_{m,\beta,\tau}(x,\tau_1)$, on a pour tout t_3, t_4 appartenant à $]0,T]$ vérifiant $t_4 - t_3 = \tau_1 - \tau$.

$$\int_{t_3}^{t_4} \phi_{m,\alpha,\tau}(x,\tau_1) \sum_{i,j,k,p} a^{p}_{ijk} D_i v_p D_j v_k \, dx \, dt < +\infty .$$

Pour démontrer la partie 3 du théorème, il suffit de recouvrir l'intervalle $[\tau_2, T]$ par des intervalles d'amplitude $\tau_1 - \tau$.

THEOREME 2.1.2.

Soient F, F_1, G, G_1, H, C_1 vérifiant,

$$G_1(x,t) \leq K_1 \exp.\left[m_o (\mathrm{Log}(2+|x|))^{2-\nu}\right],$$

$$\frac{F(x,t)}{G(x,t)} \leq K_1 (1+|x|)^2 \left[\mathrm{Log}(2+|x|)\right]^{\nu},$$

$$\frac{H(x,t)}{G(x,t)} \leq K_1 \left[\mathrm{Log}(2+|x|)\right]^{2-\nu},$$

$$\frac{C_1(x,t)}{G(x,t)} \leq K_1 \left[\mathrm{Log}(2+|x|)\right]^{2-\nu},$$

$$\frac{F_1(x,t)}{G(x,t)} \leq K_1 \exp.\left[m_o (\mathrm{Log}(2+|x|))^{2-\nu}\right],$$

où, m_o et K_1 sont des constantes positives, ν un réel vérifiant $0 \leq \nu \leq 1$.

Soit la fonction ψ définie dans $\mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$(x,t) \to \psi'(x,t) = \exp.\ [-m_1\ (\text{Log}\ (2+|x|))^{2-\nu}],$$

ou m_1 est une constante positive.

Soit v appartenant à $K_{\psi'}$, v solution du problème A.
Alors, si on définit la fonction $\phi'_{m,\beta,\tau}$ par :

$$(x,t) \to \phi'_{m,\beta,\tau}(x,t) = \exp.\ -\frac{m\left[\text{Log}(2+|y|)\right]^{2-\nu}}{\beta-(t-\tau)}$$

définie dans $\mathbb{R}^n \times [\tau, \tau+\frac{\beta}{2}]$, où $|y| = \max(r_o, |x|)$, m et β des constantes positives, il existe deux constantes positives β_1 et β_2 indépendantes de τ telles que si $m<\beta_1$, et $\frac{m}{\beta}>\beta_2$ (on supposera toujours $\beta<1$), on ait :

1) $\int_\Omega \sum_{p,k} \phi'^2_{m,\beta,\tau}\ \alpha_{p,k}\ v_p\ v_k\ dx$ fonction décroissante de t,

pour t appartenant à $[\tau, \tau+\frac{\beta}{2}] \cap [0,T]$ et ceci pour tout τ,

2) $\int_\Omega \sum_{p,k} \phi'^2_{m,\beta,\tau}(x,\tau_1)\ \alpha_{p,k}\ v_p\ v_k\ dx$ finie pour tout t appartenant à $]0,T]$ et tout τ_1 fixé vérifiant :

$$0 < \tau_1 - \tau < \frac{\beta}{2},$$

3) $\phi'^2_{m,\beta,\tau}(x,\tau_1) \sum_{i,j,k,p} a^p_{ijk}\ D_i\ v_p\ D_j\ v_k$ appartenant à

$L^1(\Omega \times [\tau_2, T])$ où $\tau_2 > 0$ et $0 < \tau_1 - \tau < \frac{\beta}{2}$

Démonstration.

Comme précédemment, on démontre que nous pouvons utiliser le corollaire 1.1.

D'après la définition, la fonction $\phi'_{m,\beta,\tau}$ vérifie les conditions 1.1.2', 1.1.3, 1.1.4.

Il faut vérifier que $\phi'_{m,\beta,\tau}$ est solution de 1.1.5.

On doit avoir :

Si $|x| < r_o$

$$\frac{m\,[\mathrm{Log}(2+|y|)]^{2-\nu}}{[\beta-(t-\tau)]^2}\,G - H - c_1 \geqslant 0$$

si $|x| > r_o$

$$\frac{m\,[\mathrm{Log}(2+|y|)]^{2-\nu}}{[\beta-(t-\tau)]^2}\,G - H - c_1 - \frac{32K_o}{2-\mu}\,\frac{m^2(2-\nu)^2[\mathrm{Log}(2+|y|)]^{2-2\nu}}{[\beta-(t-\tau)]^2\,(2+|y|)^2} \geqslant$$

Si on divise par G et si on utilise les hypothèses faites sur F, G, H, c_1, les inéquations précédentes sont entraînées si :

$$\frac{m}{[\beta-(t-\tau)]^2} - 2K_1 \geqslant 0$$

et :

$$\frac{m}{[\beta-(t-\tau)]^2} - 2K_1 - K_1\,\frac{32K_o}{2-\mu}\,\frac{m^2(2-\nu)^2}{[\beta-(t-\tau)]^2} \geqslant 0\,.$$

Comme précédemment, on trouve que $\phi'_{m,\beta,\tau}$ est solution de 1.1.5 si :

$$\frac{m}{\beta^2} > 4K_1 \quad \text{et} \quad m < \frac{2-\mu}{64K_oK_1(2-\nu)^2} = \beta_1.$$

Pour démontrer 1.1.6', nous utilisons le lemme 2.1.1.

On pose :

$$F_{j,p,k} = \phi'^2_{m,\beta,\tau} \sum_i x_i\, a^p_{ijk}.$$

Le même calcul que pour le théorème 2.1.1. montre que :

$$F_{jpk} = F_{jkp} ,$$

$$0 \leq \sum_{j,k,p} \frac{x_j}{|x|} F_{jpk} v_p v_k \leq$$

$$\leq 4 K_o K_1^2 (1+|x|)^2 [\mathrm{Log}(2+|x|)]^{\nu} \exp. \left[(-\frac{2m}{\beta} + m_o) [\mathrm{Log}(2+|y|)]^{2-\nu} \right] v^2$$

De même :

$$\left| \sum_{j,k,p} v_p v_k D_j F_{jpk} \right| \leq \left[4K_o n K_1^2 (1+|x|)^2 + n^2 N^2 K_1^2 |x| + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{8m}{\beta} K_1^2 \right] \exp. \left[(- \frac{2m}{\beta} + 2m_o) [\mathrm{Log}\ (2+|y|)]^{2-\nu} \right] v^2$$

Nous remarquerons que si $\frac{2m}{\beta} > 2m_o + m_1 + 3$, alors les F_{jpk} vérifient les hypothèses demandées dans le lemme 2.1.1. On peut donc utiliser les résultats du corollaire 1.1 si $m \leq \beta_1$ et $\frac{m}{\beta} > \beta_2 = \mathrm{Max}\ (4K_1, \frac{2m_o + m_1 + 3}{2})$.

La suite de la démonstration est identique à celle du théorème 2.1.1.

Remarque :

Dans le théorème 2.1.1 et 2.1.2, nous faisons intervenir les fonctions $\phi_{m,\beta,\tau}$ et $\phi'_{m,\beta,\tau}$ qui vérifient les hypothèses demandées pour l'application du théorème 1.1.1, en particulier $\phi_{m,\beta,\tau}$ et $\phi'_{m,\beta,\tau}$ vérifient la condition 1.1.5. On peut se poser le problème suivant :

Est-il possible d'obtenir une fonction ϕ mieux adaptée qui vérifie 1.1.5 ? La réponse à ce problème est donnée par le théorème 4.1.1.

THEOREME 2.1.3

Soient H, c_1, G vérifiant :

$$\frac{c_1}{G} \leqslant K_1 ,$$

$$\frac{H}{G} \leqslant K_1 ,$$

où K_1 est une constante positive donnée.

Soit la fonction $\Psi"$ définie dans S à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$(x,t) \to \Psi"(x,t) = \sqrt{|x| . \max[F(x,t), G_1(x,t), F_1(x,t)]}.$$

Soit v appartenant à $K_{\Psi"}$, v solution du problème A. Alors, si on définit la fonction ϕ_m par :

$$(x,t) \to \phi_m(x,t) = e^{-mt}$$

défini dans $\mathbb{R}^n \times [0,T]$, il existe une constante positive β_1, telle que, si $m \geqslant \beta_1$, on ait :

1) $\int_\Omega \sum_{p,k} \phi_m^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx$ fonction décroissante de t, pour t appartenant à $[0,T]$,

2) $\int_\Omega \sum_{p,k} \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx < +\infty$ pour tout t appartenant à $]0,T]$,

3) $\sum_{i,j,k,p} a^p_{ijk} D_i v_p D_j v_k$ appartenant à $L^1(\Omega \times [\tau_1,T])$

où $\tau_1 > 0$.

Démonstration.

D'après la définition, la fonction ϕ_m vérifie les conditions 1.1.2', 1.1.3, 1.1.4.

Pour 1.1.5, on doit avoir :

$$m\,G - (H + c_1) \geqslant 0 .$$

C'est-à-dire $m \geqslant 2K_1 = \beta_1$.

Pour démontrer 1.1.6', nous utilisons le lemme 2.1.1.
Posons :

$$F_{jpk} = \phi_m^2 \sum_i x_i\, a^p_{ijk} .$$

On a :

$$0 \leqslant \sum_{j,p,k} \frac{x_j}{|x|} F_{jpk}\, v_p\, v_k \leqslant |x|\, F\, v^2 \leqslant \psi''^2\, v^2$$

$$\left| \sum_{j,p,k} v_p\, v_k\, D_j\, F_{jpk} \right| \leqslant (4K_0\, n\, F + n^2 N^2\, |x|\, F_1)\, v^2 \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant (4K_0\, n + n^2 N^2)\, \psi''^2\, v^2, \text{ si } |x| \geqslant 1 .$$

Puisque v appartient à $K_{\psi''}$, alors les F_{jpk} vérifient les hypothèses demandées dans le lemme 2.1.1. On peut donc utiliser les résultats du corollaire 1.1, si $m \geqslant \beta_1$.

On a donc :

$\int_\Omega \sum_{p,k} \phi_m^2\, \alpha_{p,k}\, v_p\, v_k\, dx$ fonction décroissante de t, pour t appartenant à $[0,T]$.

Supposons que :

$\int_\Omega \sum_{p,k} \alpha_{p,k}\, v_p\, v_k\, dx = +\infty$ pour $t = t_3$ appartenant à $]0,T]$.

On a donc :

$$e^{-mt_3} \int_\Omega \sum_{p,k} \alpha_{p,k}\, v_p\, v_k \, dx = +\infty \quad \text{pour } t = t_3 .$$

Donc, d'après (1) on a :

$$e^{-mt} \int_\Omega \sum_{p,k} \alpha_{p,k}\, v_p\, v_k \, dx = +\infty \quad \text{pour } t \text{ appartenant à } [0,t_3],$$

donc :

$$\int_\Omega \sum_{p,k} \alpha_{p,k}\, v_p\, v_k \, dx = +\infty \quad \text{pour } t \text{ appartenant à } [0,t_3].$$

Mais d'après l'hypothèse que $\sum_{p,k} \alpha_{p,k}\, v_p\, v_k \leq G_1 . v^2$, on a :

$$\int_\Omega G_1 . v^2 \, dx = +\infty \quad \text{pour tout } t \text{ appartenant à } [0,t_3],$$

contraire à l'hypothèse que v appartient à K_ψ".

D'après les résultats du corollaire 1.1, on a :

$$\int_{\tau_1}^{T} \int_\Omega e^{-mt} \sum_{i,j,k,p} a^p_{ipk}\, D_i\, v_p\, D_j\, v_k \, dx\, dt < +\infty \text{ pour } \tau_1 > 0.$$

Comme $\sum_{i,j,k,p} a^p_{ijk}\, D_i\, v_p\, D_j\, v_k$ est positive, on en déduit que :

$$e^{-mT} \int_{\tau_1}^{T} \int_\Omega \sum_{i,j,k,p} a^p_{ijk}\, D_i\, v_p\, D_j\, v_k \, dx\, dt < +\infty ,$$

ce qui démontre la troisième partie du théorème.

§ 2 - CAS PARTICULIER : N = 1

Définition.

Soit Ψ une fonction définie dans $\mathbb{R}^n \times [0,T]$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on appelle $K_{+\Psi}$ (respectivement $K_{-\Psi}$) l'ensemble des applications appartenant à $c^{1,2}(S)$, vérifiant les propriétés suivantes :

i) $v_+(x,t) = 0$ (respectivement $v_-(x,t) = 0$) pour (x,t) appartenant à $\Gamma \times [0,T]$.

ii) Ψv_+ (respectivement Ψv_-) appartenant à $L^2(S)$.

Remarque : La fonction Ψ ne peut être définie que dans S.

Dans la suite nous noterons les coefficients a_{ij} et α au lieu a^1_{ij1} et α_{11}.

Nous dirons que v est solution du problème B si v vérifie :

$$B \begin{cases} -2v\, L_1\, v \leq c_1\, v^2 + \mu \sum_{i,j} a_{ij}\, D_i\, v\, D_j\, v \text{ pour tout } (x,t) \\ \text{appartenant à } \Omega \times [0,T], \\ \text{où } c_1 \text{ appartient à } C(S) \text{ et } \mu \text{ est une constante positive ou} \\ \text{nulle inférieure à 2.} \end{cases}$$

THEOREME 2.2.1.

Soient F, F_1, G, G_1, H, c_1 vérifiant les mêmes hypothèses que pour le théorème 2.1.1.

Soit la fonction Ψ définie dans $\mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$(x,t) \rightarrow \Psi(x,t) = \exp. - m_1 |x|^{2-\lambda},$$

ou m_1 est une constante positive.

Soit v appartenant à $K_{+\psi}$, v solution du problème B.

Alors, si on définit la fonction $\phi_{m,\beta,\tau}$ par :

$$(x,t) \longrightarrow \phi_{m,\beta,\tau}(x,t) = \exp. - \frac{m(1+|x|)^{2-\lambda}}{\beta - (t-\tau)}$$

définie dans $\mathbb{R}^n \times [\tau, \tau + \frac{\beta}{2}]$, où m et β sont des constantes positives, il existe deux constantes positives β_1 et β_2 indépendantesde τ (on supposera toujours $\beta \leq 1$) telles que, si $m \leq \beta_1$ et $\frac{m}{\beta} \geq \beta_2$ on ait :

1) $\int_\Omega \phi^2_{m,\beta,\tau}\, \alpha v_+^2\, dx$ fonction décroissante de t, pour t appartenan à $[\tau, \tau + \frac{\beta}{2}] \cap [0,T]$ et ceci pour tout τ ,

2) $\int_\Omega \phi^2_{m,\beta,\tau}(x,\tau_1)\, \alpha v_+^2\, dx < +\infty$ pour tout $t \neq 0$ et tout τ_1 vérifiant $0 < \tau_1 - \tau < \frac{\beta}{2}$,

3) $\phi^2_{m,\beta,\tau}(x,\tau_1) \sum_{i,j} a_{ij} D_i v_+ D_j v_+$ appartient à $L^1(\Omega \times [\tau_2, T])$ où $\tau_2 > 0$ et $0 < \tau_1 - \tau < \frac{\beta}{2}$.

Démonstration.

Nous allons démontrer que les hypothèses du corollaire 1.2 sont vérifiées.

Dire que v est solution du problème B, c'est dire que v est solution d'une inéquation du type 1.2.1, où on a remplacé L par L_1 ; les coefficients de L_1 vérifiant les hypothèses demandées dans ce corollaire.

Nous avons déjà vu que la fonction $\phi_{m,\beta,\tau}$ vérifiait 1.1.2', 1.1.3, 1.1.4, 1.1.5, pourvu que :

$$\frac{m}{\beta^2} \geq 4K_1 \quad \text{et} \quad m \leq \frac{2-\mu}{64K_oK_1(2-\lambda)^2} = \beta_1$$

Il reste à démontrer que $\phi_{m,\beta,\tau}$ et v vérifient les conditions 1.2.2'.

Pour celà, nous allons démontrer un lemme utile à la démonstration et qui servira par la suite.

LEMME 2.2.1.

Soient F_j des fonctions appartenant à $C^1(\bar{\Omega} \times [t_1,t_2])$ où t_1 t_2 vérifient $o \leq t_1 < t_2 \leq T$.

Si pour tout v appartenant à $C^{1,2}(S)$, v_+ nulle sur $\Gamma \times]O,T]$, on a :

$$\sum_j \frac{x_j}{|x|} F_j v^2 \quad \text{et} \quad \sum_j v^2 D_j[F_j] \text{ appartiennent à } L^1(\Omega \times [t_1,t_2]),$$

alors, pour tout τ_1 τ_2 vérifiant $t_1 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq t_2$, pour toute constante positive R donnée, il existe une suite $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini, telle que :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma r_m} \sum_j 2 F_j v_+ D_j v \, ds \, dt \leq R.$$

Démonstration.

Comme v appartient à $C^{1,2}(S)$, on peut utiliser le lemme 1,2 et on a :

$2\, v_+\, D_j\, v = D_j\, v_+^2$ presque partout dans S, car on a supposé que la mesure de Γ est nulle. De plus v_+ est lipschitzienne sur tout borné de S.

Soit :

$$I(\rho) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_\rho} \sum_j 2\, F_j\, v_+\, D_j\, v \, dx\, dt$$

On a :

$$I(\rho) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_\rho} \sum_j D_j(F_j\, v_+^2)\, dx\, dt - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_\rho} v_+^2\, D_j(F_j)\, dx\, dt.$$

Comme $v(x,t) \leqslant 0$ pour (x,t) appartenant à $\Gamma \times [0,T]$, on peut appliquer le lemme 1.1.2 à la fonction $F_j\, v_+^2$ qui est lipschitzienne dans tout borné de S et qui est nulle sur $\Gamma \times [0,T]$. De plus, la dernière intégrale est convergente. On a donc :

$$I(\rho) \leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_\rho} \frac{x_j}{\rho}\, F_j\, v_+^2 \, d\, s\, dt + R_1 ,$$

où R_1 est une constante positive indépendante de ρ. La suite de la démonstration est identique à la démonstration du lemme 2.1.1.

Revenons à la démonstration de 1.1.2'.

Posons :

$$F_j = \phi^2_{m,\beta,\tau} \sum_i x_i\, a_{ij}$$

On montre, comme pour le théorème 2.1.1 que, si $\frac{2m}{\beta} > 2m_o + m_1$, alors, F_j vérifie les hypothèses demandées dans le lemme 2.2.1.

On a donc : pour tout $(\tau_1\ \tau_2)$ $\quad t_1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_2$ où $t_1 = \max(0,\tau)$ et $t_2 = \min(T, \tau + \frac{\beta}{2})$, il existe une suite r_m tendant vers l'infini et une suite $R_m = \frac{R}{r_m}$ tendant vers zéro, telles que :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_{r_m}} \sum_{i,j} 2\phi^2_{m,\beta,\tau}\ \frac{x_i}{r_m}\ a_{ij}\ v_+\ D_j\ v\ d\ s\ dt \leq \frac{R}{r_m}\ .$$

On peut donc utiliser le corollaire 1.2. La suite de la démonstration est identique à celle du théorème 2.1.1.

THEOREME 2.2.2.

Soient F, F_1, G, G_1, H, c_1 vérifiant les mêmes hypothèses que pour le théorème 2.1.2.

Soit la fonction ψ'définie dans $\mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$(x,t) \to \psi'(x,t) = \exp.\ \left[- m_1 (\mathrm{Log}(2 + |x|))^{2-\nu}\right]$$

où m_1 est une constante positive.

Soit v appartenant à $K_{+\psi'}$, v solution du problème B.

Alors, si on définit la fonction $\phi'_{m,\beta,\tau}$ par :

$$(x,t) \to \phi'_{m,\beta,\tau}(x,t) = \exp.\left[- \frac{m[\mathrm{Log}(2 + |x|)]^{2-\nu}}{\beta - (t-\tau)}\right] ,$$

définie dans $\mathbb{R}^n \times [\tau, \tau + \frac{\beta}{2}]$ où m et β sont deux constantes positives, β inférieure à 1, il existe deux constantes β_1 et β_2 indépendantes de τ telles que, si :

$m < \beta_1$ et $\frac{m}{\beta} > \beta_2$

on ait :

1) $\int_{\ell} \phi'^2_{m,\beta,\tau} \ \alpha v_+^2 \, dx$ fonction décroissante de t,

pour t appartenant à $[\tau, \tau + \frac{\beta}{2}] \cap [0,T]$ et ceci pour tout τ ,

2) $\int_{\Omega} \phi'^2_{m,\alpha,\tau} \ (x,\tau_1) \ \alpha(x,t) \ v_+^2(x,t) \, dx < +\infty$ pour tout t

appartenant à $]0,T]$ et tout τ_1 fixé vérifiant :

$$0 < \tau_1 - \tau < \frac{\beta}{2} \ ,$$

3) $\phi'^2_{m,\beta,\tau} \ (x,\tau_1) \sum_{i,j} a_{ij} \ D_i \, v_+ \, D_j \, v_+$ appartenant à

$L^1 \ (\Omega \times [\tau_2, T])$ où $\tau_2 > 0$ et $0 < \tau_1 - \tau < \frac{\beta}{2}$.

Démonstration.

Comme précédemment, nous démontrons que nous pouvons utiliser le corollaire 1.1.

Nous avons déjà vu que $\phi'_{m,\beta,\tau}$ vérifiait 1.1.2', 1.1.3, 1.1.4, 1.1.5, pourvu que :

$$\frac{m}{\beta^2} \geq 4K_1 \quad \text{et} \quad m \leq \frac{2 - \mu}{64 K_0 K_1 (2-\nu)^2} = \beta_1 .$$

Pour démontrer 1.2.2', nous utilisons le lemme 2.1.1.

On pose $F_j = \phi'^2_{m,\beta,\tau} \sum_i x_i \, a_{ij}$.

On montre, comme pour le théorème 2.1.2 que si $\frac{2m}{\beta} > 2m_0 + m_1 + 3$, alors F_j vérifie les hypothèses demandées dans le lemme 2.2.1.

On peut donc utiliser les résultats du corollaire 1.2,

si $m < \beta$, et $\frac{m}{\beta} > \beta_2 = \max\left(4K_1, \frac{2m_0 + m_1 + 3}{2}\right)$.

La suite de la démonstration est identique à celle du théorème 2.1.2.

THEOREME 2.2.3.

Soient G, H, c_1 vérifiant les mêmes hypothèses que pour le théorème 2.1.3.

Soit la fonction Ψ'' définie dans $\mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$(x,t) \to \Psi(x,t) = \sqrt{|x| \cdot (F(x,t), F_1(x,t), G_1(x,t)}.$$

Soit v appartenant à $K_{+\Psi''}$, v solution du problème B.

Alors, si on définit la fonction ϕ_m par :

$$(x,t) \to \phi_m(x,t) = e^{-mt}$$

définie dans $\mathbb{R}^{n+1}$, où m est une constante positive, il existe une constante positive β_1, telle que, si : $m > \beta_1$, on ait :

1) $\int_\Omega \phi_m^2 \alpha v_+^2 \, dx$ fonction décroissante de t, pour t appartenant à $[0,T]$,

2) $\int_\Omega \alpha v_+^2 \, dx < +\infty$ pour t appartenant à $]0,T]$,

3) $\sum_{i,j} a_{ij} D_i v_+ D_j v_+$ appartenant à $L^1(\Omega \times [\tau,T])$ où $\tau > 0$.

Démonstration.

Comme précédemment, nous démontrons que nous pouvons utiliser le corollaire 1.1.

Nous avons déjà vu que ϕ_m vérifiait 1.1.2', 1.1.3, 1.1.4, 1.1.5, pourvu que :

$$m > 2K_1 = \beta_1.$$

Pour démontrer 1.2.2', nous utilisons le lemme 2.1.1.
Nous posons :

$$F_j = \phi_m^2 \sum_i x_i a_{ij}.$$

On montre, comme pour le théorème 2.1.3. que si v appartient à $K_{+\psi''}$, alors v et ϕ_m vérifient les hypothèses demandées dans le lemme 2.2.1.

On peut donc utiliser les résultats du corollaire 1.2.

La suite de la démonstration est identique à celle du théorème 2.1.3

Remarque.

Tout ce qui vient d'être démontré dans ce paragraphe se répète si on remplace v_+ par v_-.

III - APPLICATIONS

Nous allons utiliser les résultats du chapitre II, pour résoudre des problèmes d'unicité. Nous donnerons ensuite des contre-exemples, montrant qu'il est impossible dans un certain sens d'améliorer ces résultats.

§1 - UNICITE

Position du problème : soit le système du type suivant :

$$L_2 v = \left\{ \sum_{i,j,k} D_i \left[a^p_{ijk} D_j v_k \right] - \sum_k D_t \left[\alpha_{p,k} v_k \right] + \sum_{i,k} b^p_{i,k} D_i v_k + \sum_k c^p_k v_k \right.$$

$$\equiv L_1 v + Bv + cv ,$$

où l'opérateur L_1 vérifie les propriétés demandées dans le Chapitre II, b^p_{ik} et C^p_k appartenant à $C^1(S)$.

On dira que v est solution du problème C , si

$$C \left\{ \begin{array}{l} v(x,0) = 0 \\ v(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \text{ appartenant à } \Gamma \times [0,T] \\ L_2 v = 0 \end{array} \right.$$

Montrons que, sous certaines conditions, si v est solution du problème C , alors v est aussi solution du problème A.

En effet, comme $L_2 v = 0$, on a :

$$L_1 v = - Bv - cv$$

$$- 2vL_1 v = \sum_{ikp} 2v_p\, b^p_{ik}\, D_i\, v_k + \sum_{k,p} 2\, c^p_k\, v_p\, v_k \quad .$$

Si les hypothèses faites sur les coefficients nous permettent d'affirmer que :

$$\sum_{i,p,k} 2v_p\, b^p_{ik}\, D_i\, v_k + \sum_{k,p} 2\, c^p_k v_p\, v_k \leq c_1\, v^2 + \mu \sum_{i,j,k,p} a^p_{ijk} D_i\, v_p D_j v_k \ ,$$

ou, plus généralement, s'il existe r_o tel que, pour tout $r \geq r_o$ et pour tout t appartenant à $[0, T]$

$$\int_{\omega_r} \left[\sum_{i,k,p} 2v_p\, b^p_{ik}\, D_i v_k + \sum_{k,p} c^p_k\, v_p v_k \right] dx \leq$$

3.1.2

$$\leq \int_{\omega_r} \left[c_1 v^2 + \mu \sum_{i,j,k,p} a^p_{ijk} D_i\, v_p\, D_j\, v_k \right] dx \ ,$$

où c_1 appartient à $C(S)$ et μ est une constante positive ou nulle inférieure à 2, alors les solutions du problème C sont aussi solutions de 3.1.3 :

pour tout $r \geq r_o$ et pour tout t appartenant à $[0, T]$

3.1.3 $$\int_{\omega_r} - 2vL_1 v\, dx \leq \int_{\omega_r} \left[c_1 v^2 + \mu \sum_{i,j,k,p} a^p_{ijk} D_i v_p\, D_j v_k \right] dx \ .$$

Dans toute la suite, nous supposerons que les coefficients de $L_2 v$ vérifient la condition 3.1.2 .

THEOREME 3.1.1

Soient F, F_1, G, G_1, H, c_1 vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème 2.1.1.

Soit la fonction ψ définie dans $\mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$(x, t) \longrightarrow \psi(x, t) = \exp - m_1 |x|^{2-\lambda} ,$$

où m_1 est une constante positive.

Si v appartient à K_ψ, si v est solution du problème C, alors v est identiquement nulle dans S.

Démonstration

Comme v est solution du problème C, on a vu que v était solution de l'inéquation 3.1.3. Vues les hypothèses faites, on peut utiliser les résultats du théorème 2.1.1, où la fonction $\phi_{m,\beta\ \tau}$ déjà définie, vérifie :

$$m > \beta_1 \quad \text{et} \quad \frac{m}{\beta} < \beta_2 .$$

On obtient en particulier :

$0 \leqslant \int_\Omega \sum_{p,k} \phi^2_{m,\beta\ \tau}\ \alpha_{p,k}\ v_p\ v_k\ dx$ fonction décroissante de t pour t appartenant à $\left[\tau, \tau + \frac{\beta}{2}\right] \cap \left[0, T\right]$ et ceci pour tout τ.

Si $\tau = 0$, par hypothèse comme $v(x, 0) = 0$, alors, pour $t = \tau = 0$, l'intégrale ,

$$\int_\Omega \sum_{p,k} \phi^2_{m,\beta\ ,\ 0}\ \alpha_{p,k}\ v_p\ v_k\ dx$$

est nulle. On en déduit donc :

$$\int_\Omega \sum_{p,k} \phi^2_{m,\beta}(0) \, \alpha_{p,k} \, v_p \, v_k \, dx = 0 \text{ pour tout t appartenant à } \left[0, \frac{\beta}{2}\right] .$$

Si on recouvre l'intervalle $[0, T]$ par des intervalles d'amplitude $\frac{\beta}{2}$, on obtient :

$$\int_\Omega \sum_{p,k} \phi^2_{m,\beta}(\ell \tfrac{\beta}{2}) \, \alpha_{p,k} \, v_p \, v_k \, dx = 0 \quad \text{pour tout t appartenant à}$$

$\left[\ell \frac{\beta}{2}, (\ell+1) \frac{\beta}{2}\right] \cap [0, T]$, où ℓ est un entier. Mais comme

$\sum_{p,k} \alpha_{p,k} \, v_p \, v_k \geq G(x) \, v^2$, on a donc :

$$\int_\Omega G(x) \, \phi^2_{m,\beta}(\ell \tfrac{\beta}{2}) \, v^2 \, dx = 0 \quad \text{pour t appartenant à}$$

$$\left[\ell \frac{\beta}{2}, (\ell+1) \frac{\beta}{2}\right] \cap [0, T] .$$

Comme G(x) est différent de zéro, on en déduit que $v = 0$ pour t appartenant à $\left[\ell \frac{\beta}{2}, (\ell+1) \frac{\beta}{2}\right] \cap [0, T]$ et ceci pour tout ℓ, donc v est identiquement nul dans S .

THEOREME 3.1.2

Soient F, F_1, G, G_1, H, c_1 vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème 2.1.2.

Soit la fonction ψ' définie dans $\mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$(x, t) \longrightarrow \psi'(x, t) = \exp\left[-m_1 \left[\text{Log}\,(2+ x)\right]^{2-\nu}\right]$$

où m_1 est une constante positive.

Si v appartient à $K_{\psi'}$, si v est solution du problème C, alors v est identiquement nulle dans S.

Démonstration

Elle est identique à la démonstration du théorème 3.1.1, mais nous utiliserons le théorème 2.1.2 au lieu d'utiliser le théorème 2.1.1

THEOREME 3.1.3

Soient F, F_1, G, G_1, H, c_1 vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème 2.1.3.

Soit la fonction ψ'' définie dans S à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$(x, t) \longrightarrow \psi''(x, t) = \sqrt{|x| \max\left(F(x, t), F_1(x, t), G_1(x, t)\right.}$$

si v appartient à $K_{\psi''}$, si v est solution du problème C, alors v est identiquement nulle dans S.

Démonstration

Elle est identique à la démonstration du théorème 3.1.1, mais nous utiliserons le théorème 2.1.3 au lieu d'utiliser le théorème 2.1.1.

§2 - CAS PARTICULIER : N=1

Nous démontrons ici des théorèmes semblables aux théorèmes 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, mais les résultats ne porteront que sur les parties positives ou négatives des solutions.

Position du problème : soit l'équation aux dérivées partielles suivante :

3.2.1 $$L_2 v = \sum_{i,j} D_i \left[a_{ij} D_j v \right] - D_t[\alpha v] + \sum_i b_i D_i v + cv$$
$$\equiv L_1 v + Bv + cv \quad ,$$

où L_1 vérifie les mêmes propriétés que celles demandées dans le chapitre II, b_i et c appartenant à C (S).

On dira que v est solution du problème C_1 si

$$C_1 \begin{cases} v_+(x,0) = 0 \\ v_+(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \text{ appartenant à } \Gamma \times [0,T] \\ L_2 v = 0 \, . \end{cases}$$

Nous supposerons que les coefficients b_i et c vérifient

$$\sum_i 2v\, b_i D_i v + 2\, c v^2 \leq C_1 v^2 + \mu \sum_{i,j} a_{ij} D_i v D_j v$$

où c_1 appartient à C(S) et μ est une constante positive ou nulle inférieure à 2.

Alors, comme précédemment, on démontre que les solutions du problème C_1 sont aussi solutions de 3.2.3

$$-2 v L_1 v \leq c_1 v^2 + \mu \sum_{i,j} a_{ij} D_i v \; D_j v$$

THEOREME 3.2.1

Soient F, F_1, G, G_1, H, c_1 vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème 2.1.1.

Soit la fonction ψ définie dans $\mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$(x, t) \longrightarrow \psi(x, t) = \exp - m_1 \left|x\right|^{2-\lambda} ,$$

où m_1 est une constante positive.

Si v appartient à $K_{+\psi}$, si v est solution du problème C_1, alors v est négative ou nulle dans S.

Démonstration

Elle est identique à celle du théorème 3.1.1 mais au lieu d'utiliser le théorème 2.1.1, on utilisera le théorème 2.2.1.

THEOREME 3.2.2

Soient F, F_1, G, G_1, H, c_1 vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème 2.1.2.

Soit la fonction ψ' définie dans $\mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$(x, t) \longrightarrow \psi'(x, t) = \exp \left[-m_1 \left[\text{Log}\,(2+\left|x\right|)\right]^{2-\nu}\right]$$

où m_1 est une constante positive.

Si v appartient à $K_{+\psi}$, si v est solution du problème C_1, alors v est négative ou nulle dans S.

Démonstration

Nous utiliserons ici le théorème 2.2.2.

THEOREME 3.2.3

Soient F, F_1, G, G_1, H, c_1 vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème 2.1.3.

Soit la fonction ψ'' définie dans S à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$(x,t) \longrightarrow \psi''(x,t) = \sqrt{|x|\ \max(F(x,t), F_1(x,t), G_1(x,t))}$$

Si v appartient à $K_{+\psi}$, si v est solution du problème C_1, alors v est négative ou nulle dans S.

Démonstration

Nous utiliserons ici le théorème 2.2.3.

Remarque :

Tout ce qui vient d'être dit dans ce paragraphe se repète aussi en remplaçant v_+ par v_-. On obtiendra alors, pour chaque théorème, que v est positif ou nul dans S.

§3 - CONTRE-EXEMPLES

CAS DU THEOREME 3.1.1.

Nous avons montré, théorème 3.1.1, l'unicité du problème mixte et en particulier du problème de Cauchy ($\Omega = \mathbb{R}^n$), dans la famille des applications appartenant à K_ψ, où ψ est définie par :

$$(x,t) \longrightarrow \psi(x,t) = \exp - m_1 |x|^{2-\lambda} .$$

Nous allons montrer ici, qu'il n'est pas possible d'améliorer ces résultats dans un certain sens.

Le problème, que nous nous posons, est la détermination d'une solution non identiquement nulle appartenant à $C^{1,2}(\mathbb{R} \times [0, T])$, de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} A(x) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R} \times [0, T] \\ u(x, 0) = 0 , \end{cases}$$

où $A(x)$ est déterminée par :

$A(x)$ appartenant à $C^1(\mathbb{R})$,
$A(x)$ vérifiant :

$$A(x) \geq (1+|x|)^{\lambda}$$
$$A(x) = (1+|x|)^{\lambda} \text{ pour } |x| \geq 1$$
$$\left|\frac{d A(x)}{dx}\right| \leq M (1+|x|)^{\lambda-1} , \quad M \text{ constante positive ,}$$

λ une constante positive ou nulle inférieure à 2.

Nous remarquons facilement qu'une telle fonction $A(x)$ existe.

De plus, si ψ_ε représente la fonction définie dans $\mathbb{R} \times [0, T]$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, par :

$$(x, t) \longrightarrow \psi_\varepsilon(x, t) = \exp - |x|^{2-\lambda+\varepsilon} ,$$

ε étant un nombre positif quelconque, la solution cherchée, devra vérifier,

$\psi_\varepsilon |u(x, t)| \leq K$, K constante positive, c'est-à-dire que u appartiendra à $K_{\psi_{2\varepsilon}}$.

Montrons d'abord qu'une telle solution est aussi solution du problème ϕ.

En effet, on a :

$$A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{dA(x)}{dx} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = L_2 u.$$

Il faut vérifier que les coefficients de L_2 vérifient la condition 3. 1. 2.

On doit avoir :

$$-2u\frac{dA(x)}{dx}\frac{\partial u}{\partial x} \leq c_1 u^2 + \mu A(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

D'après les hypothèses précédentes, nous avons :

$$-2u\frac{dA(x)}{dx}\frac{\partial u}{\partial x} \leq 2M(1+|x|)^{\lambda-1}\left|u\right|\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|,$$

$$-2u\frac{dA(x)}{dx}\frac{\partial u}{\partial x} \leq 2\left(M(1+|x|)^{\frac{\lambda}{2}-1}u\right)\left((1+|x|)^{\frac{\lambda}{2}}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)$$

$$\leq M^2(1+|x|)^{\lambda-2}u^2 + (1+|x|)^{\lambda}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

Comme λ est inférieur à 2, on a :

$$-2u\frac{dA(x)}{dx}\frac{\partial u}{\partial x} \leq M^2 u^2 + A(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

Donc les coefficients vérifient bien la condition 3. 2. 2 avec $\mu = 1$, et $C_1 = M^2$.

Dans ce cas particulier, nous avons aussi :

$$F = 2^{\lambda}(1+|x|)^{\lambda}$$

$G_1 = G = 1$

$F_1 \leq M (1 + |x|)^{\lambda - 1}$

$H = 0$

$c_1 = M^2$,

donc F, F_1, G, G_1, H, c_1 vérifient les hypothèses demandées dans le théorème 3.1.1.

Recherche de la solution :

Nous cherchons une solution $W(x, t)$ sous forme de série.

Formellement, nous posons :

$$W(x, t) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m(x) \; f^{(m)}(t) \; ,$$

où $a_m(x)$ sont des fonctions de x et $f^{(m)}(t)$ est la dérivée d'ordre m d'une certaine fonction de t.

Identifions, nous avons :

$$A(x) \sum_{m=0}^{+\infty} a''_m(x) \; f^{(m)}(t) - \sum_{m=0}^{+\infty} a_m(x) \; f^{(m+1)}(t) = 0$$

D'où :

$$\begin{cases} a''_0 = 0 \\ A(x) \; a''_{m+1} = a_m \end{cases} .$$

Nous déterminons les fonctions a_m par la récurrence suivante :

$$a_0(x) = \alpha x$$

$$a_{m+1}(x) = \int_0^x \left[\int_0^\rho \frac{a_m(u)}{A(u)}\, du \right] d\rho \ ,$$

où α est une constante positive.

Nous allons montrer que la série formelle : $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(x)\, f^{(m)}(t)$,

converge absolument et que sa somme est une fonction appartenant à $C^{1,2}(\mathbb{R} \times [0,T])$, pourvu que $f^{(m)}(t)$ vérifie une certaine condition.

Pour cela, nous allons majorer a_m ainsi que ses dérivées premières et secondes. On a :

$$a''_0 = 0$$

$$a'_0 = \alpha$$

$$|a_0| = \alpha |x|$$

D'après la récurrence, on a :

$$a''_1(x) = \frac{\alpha x}{A(x)}$$

Donc :

$$|a''_1(x)| \leq \alpha |x|^{1-\lambda} \quad \text{et} \quad |a''_1(x)| \leq \alpha |x| \ \text{pour} \ |x| \leq 1$$

$$a'_1(x) = \int_0^x \frac{\alpha \rho}{A(\rho)}\, d\rho \qquad a'_1(x) \leq \frac{\alpha}{2-\lambda} |x|^{2-\lambda}$$

$$a_1(x) = \int_0^x a'_1(\rho)\, d\rho \qquad |a_1(x)| \leq \frac{\alpha}{(2-\lambda)(3-\lambda)} |x|^{3-\lambda}$$

Montrons par récurrence, que nous avons :

$$\left\{\begin{array}{l} |a_m(x)| \leq \dfrac{\alpha |x|^{m(2-\lambda)+1}\ \Gamma\left(\frac{1}{2-\lambda}\right)}{(2-\lambda)^{2m}\ m!\ \Gamma\left(m+\frac{1}{2-\lambda}\right)} \\ |a'_m(x)| \leq \dfrac{\alpha |x|^{m(2-\lambda)}\ \Gamma\left(\frac{1}{2-\lambda}\right)}{(2-\lambda)^{2m-1}\ m!\ \Gamma\left(m-1+\frac{1}{2-\lambda}\right)} \\ |a''_m(x)| \leq \dfrac{\alpha |x|^{(m-1)(2-\lambda)+1-\lambda}\ \Gamma\left(\frac{1}{2-\lambda}\right)}{(2-\lambda)^{2m-2}(m-1)!\ \Gamma\left(m-1+\frac{1}{2-\lambda}\right)} \end{array}\right. \quad (I)$$

et

$$|a''_m(x)| \leq \frac{\alpha |x|^{(m-1)(2-\lambda)+1}\ \Gamma\left(\frac{1}{2-\lambda}\right)}{(2-\lambda)^{2m-2}\ (m-1)!\ \Gamma\left(m-1+\frac{1}{2-\lambda}\right)} \quad \text{pour } |x| \leq 1$$

où Γ est la fonction eulérienne.

Supposons I vraie pour m, on a :

$$a''_{m+1}(x) = \frac{a_m(x)}{A(x)}$$

Donc,

$$|a''_{m+1}(x)| \leq \frac{\alpha |x|^{m(2-\lambda)+1-\lambda}\ \Gamma\left(\frac{1}{2-\lambda}\right)}{(2-\lambda)^{2m}\ m!\ \Gamma\left(m+\frac{1}{2-\lambda}\right)}$$

et pour $|x| \leq 1$, on a :

$$a''_{m+1}(x) \leq \frac{\alpha |x|^{m(2-\lambda)+1}\ \Gamma\left(\frac{1}{2-\lambda}\right)}{(2-\lambda)^{2m}\ m!\ \Gamma\left(m+\frac{1}{2-\lambda}\right)}$$

$$a'_{m+1}(x) = \int_0^x a''_{m+1}(\rho)\ d\rho\ ,$$

$$|a'_{m+1}(x)| \leq \frac{\alpha\, |x|^{(m+1)(2-\lambda)}\ \Gamma\left(\frac{1}{2-\lambda}\right)}{(2-\lambda)^{2m+1}\ (m+1)!\ \Gamma\left(m+\frac{1}{2-\lambda}\right)}$$

$$a_{m+1}(x) = \int_0^x a'_{m+1}(\rho)\ d\rho$$

$$|a_{m+1}(x)| \leq \frac{\alpha\, |x|^{(m+1)(2-\lambda)+1}\ \Gamma\left(\frac{1}{2-\lambda}\right)}{(2-\lambda)^{2m+2}\ (m+1)!\ \Gamma\left(m+1+\frac{1}{2-\lambda}\right)}$$

Comme I est vrai pour $m = 1$, le théorème de récurrence prouve que I est vraie pour tout m .

Nous poserons $2-\lambda = k$.

Si $f^{(m)}(t)$ vérifie la condition suivante :

$$|f^{(m)}(t)| \leq (\varepsilon_m)^m\ k^{2m}\ m!\ \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}$$

où ε_m tend vers zéro quand m tend vers l'infini, alors la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(x)\ f^{(m)}(t)$$

converge uniformément sur tout borné de $\mathbb{R} \times [0, T]$. De plus, en dérivant

chaque terme de la série, on obtient de nouvelles séries uniformément convergentes sur tout borné de $\mathbb{R} \times [0, T]$.

Ce qui prouve, en particulier, que si W est la somme de cette série, alor W appartient à $C^{1,2}(\mathbb{R} \times [0,T])$.

Nous voulons de plus que f ainsi que ses dérivées soient nulles pour t = 0, ce qui entraînera $W(x, 0) = 0$.

Voyons si une telle fonction f non identiquement nulle existe.

Soit p l'entier déterminé par :

$$p \leqslant \frac{1}{k} < p+1 \quad ,$$

On a :

$$|f^{(m)}(t)| \leqslant (\varepsilon_m)^m \; k^{2m} \; m! \; \frac{\Gamma(m+p+\mu)}{\Gamma(p+\mu)}$$

où μ est défini par $\frac{1}{k} = p + \mu$; μ est donc compris entre 0 et 1 .

Utilisons la propriété de la fonction eulérienne suivante :

$$\begin{cases} \mu \text{ étant un réel compris entre 0 et 1 ;} \\ \lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{\Gamma(\mu + n)}{n! \; n^{\mu}} = 1 \end{cases}$$

et la formule de Stirling.

On a :

$$|f^{(m)}(t)| \leqslant M(\varepsilon_m)^m \; k^{2m} \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m+p}{e}\right)^{m+p} \sqrt{2\pi(m+p)} \; (m+p)$$

où M est une constante positive qui ne dépend pas de m.

Nous posons :

$$\varepsilon_m = m^{\delta - 1} \quad \text{où } \delta \text{ est un réel inférieur à 1.}$$

Dans ce cas particulier, on a :

$$|f^{(m)}(t)| \leq M_1 \; m^{(1+\delta)m} \; m^{p+2}$$

où M_1 est une constante positive qui ne dépend pas de m.

Nous connaissons l'existence de fonctions indéfiniment dérivables, s'annulant ainsi que toutes leurs dérivées pour t = 0, ces fonctions n'étant pas identiquement nulles et vérifiant l'inégalité :

$$|f^{(m)}(t)| \leq M_1 \; m^{(1+\delta)m} \quad \text{. Voir [5]}$$

Si f est une telle fonction, alors la fonction W somme de la série :

$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(x) \; f^{(m)}(t)$, non identiquement nulle, vérifie :

$$\begin{cases} A(x) \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \dfrac{\partial W}{\partial t} = 0 \\ W(x, 0) = 0 \\ W \text{ appartenant à } C^{1,2}(\mathbb{R} \times [0, T]) . \end{cases}$$

Nous remarquons aussi que la fonction W est solution du problème mixte où le domaine Ω est $\mathbb{R}_+$.

En effet, on a $W(0, t) = 0$.

De plus, la fonction W croit moins vite que

$$\exp |x|^{\frac{k}{1-\delta}} \qquad \text{voir} [\ 5\ ]$$

Donc, pour δ assez petit, vérifiant :

$\frac{k}{1-\delta} < k + \varepsilon = 2 - \lambda + \varepsilon$, la fonction W est une des solutions demandées.

CAS DU THEOREME 3.1.2

Comme précédemment, nous allons déterminer une solution non identiquement nulle, appartenant à $C^{1,2}(\mathbb{R} \times [0, T])$ de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} A(x) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times [0, T] \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

où A(x) est déterminée par :

A(x) appartenant à $C^1(\mathbb{R})$

A(x) vérifiant :

$$A(x) \geq \max \left[(1+|x|)^2 \left[\text{Log}\,(1 + |x|) \right]^{\nu} , 1 \right]$$

$$A(x) = (1 + x)^2 \left[\text{Log}\,(1+|x|) \right]^{\nu} \qquad \text{pour } |x| \geq 1$$

$$\left| \frac{dA(x)}{dx} \right| \leq \max \left[M(1 + |x|)\,(\text{Log}\,(1+|x|))^{\nu} , 1 \right]$$

où M est une constante positive, ν un réel positif ou nul inférieur à 1.

Nous traiterons ensuite le cas $\nu = 1$ où $A(x)$ sera une nouvelle fonction.

Nous remarquons qu'une telle fonction $A(x)$ existe. De plus, si ψ'_ε représente la fonction définie dans $\mathbb{R} \times [0, T]$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$(x, t) \longrightarrow \psi'_\varepsilon (x, t) = \exp - \left[\text{Log} (2 + |x|) \right]^{2-\nu+\varepsilon}$$

la solution cherchée devra vérifier :

$\psi'_\varepsilon \cdot |u(x, t)| < K$, K constante positive,

c'est-à-dire u appartiendra à $K_{\psi'_{2\varepsilon}}$.

Comme précédemment, il faut d'abord montrer qu'une telle solution est aussi solution du problème C. Nous devons avoir ici :

$$-2u \frac{dA(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \leq c_1 u^2 + \mu A(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 .$$

D'après les hypothèses faites sur $A(x)$, nous avons :

$$-2u \frac{dA(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \leq 2 |u| \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \max \left[M(1+|x|) \left[\text{Log}(1+|x|)\right]^\nu , 1 \right]$$

Si $M(1+|x|)\left[\text{Log}(1+|x|)\right]^\nu \leq 1$, nous avons :

$$-2u \frac{dA(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \leq u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \leq u^2 + \mu A(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

Si $M(1+|x|) \text{ Log}(1+|x|)^\nu > 1$, nous avons :

$$-2u \frac{dA(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \leq M^2 \left[\text{Log}(1+|x|)\right]^\nu u^2 + (1+|x|)^2 (\text{Log}(1+|x|))^\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Donc, dans tous les cas, nous avons :

$$-2u \frac{dA(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \leq c_1 u^2 + \mu A(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

où μ est une constante positive inférieure à 2 et $c_1(x, t) = \max \left[1, M^2 \left[\text{Log}(1+|x|)\right]\right.$

Dans ce cas particulier, nous avons aussi :

$$F = K_1 (1+|x|)^2 \left[\text{Log}(2+|x|)\right]^\nu$$

$G_1 = G = 1$

$F_1 \leq K_1(1+|x|) \left[\text{Log}(2+|x|)\right]^{\nu}$

$H = 0$

$c_1 \leq K_1 \left[\text{Log}(2+|x|)\right]^{\nu}$

où K_1 est une constante positive.

Donc F, F_1, G, G_1, H, c_1 vérifient les hypothèses demandées dans le théorème 3. 1. 2.

Recherche de la solution :

Comme précédemment, nous cherchons une solution $W'(x, t)$ sous forme de série.

Formellement, nous posons :

$$W'(x, t) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m(x) \; f^{(m)}(t)$$

où $a_m(x)$ sont des fonctions de x et $f^{(m)}(t)$ est la dérivée d'ordre m d'une certaine fonction de t.

En identifiant, nous avons :

$$\begin{cases} a''_0 = 0 \\ A(x)\, a''_{m+1} = a_m \end{cases} .$$

Nous déterminerons les fonctions a_m par la récurrence suivante ,

$$a_0(x) = 1 + x$$

$$a_{m+1}(x) = \int_0^x \left[\int_0^\rho \frac{a_m(u)}{A(u)} \, du \right] d\rho \quad .$$

Nous allons montrer que la série $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(x) \, f^{(m)}(t)$ converge absolument et que sa somme est une fonction appartenant à $C^{1,2}(\mathbb{R} \times [0,T])$, pourvu que $f^{(m)}(t)$ vérifie une certaine condition.

Pour cela, majorons a_m ainsi que ses dérivées premières et secondes. Nous avons :

$$a''_0 = 0$$

$$a'_0 = 1$$

$$|a_0| \leq 1 + |x| \quad .$$

D'après la récurrence, nous avons :

$$a''_1 = \frac{1 + x}{A(x)} \quad .$$

Donc,

$$|a''_1(x)| \leq \frac{1}{(1+|x|)\left[\mathrm{Log}(1+|x|\right]^{\nu}} \quad \text{pour tout } x \neq 0$$

et

$$|a''_1(x)| \leq (1+|x|) \text{ pour } |x| < 1 \; ;$$

$$a'_1 = \int_0^x a''_1(u) \, du$$

$$|a'_1(x)| \leq \frac{\left[\mathrm{Log}\,(1+|x|)\right]^{1-\nu}}{1-\nu}$$

$$a_1(x) = \int_0^x a'_1(u) \quad du$$

$$|a_1(x)| \leq \left| \int_0^x \frac{1}{1-\nu} \left[\text{Log}\,(1+|u|) \right]^{1-\nu} du \right|$$

$$|a_1(x)| \leq \left| \int_0^x \frac{\left[\text{Log}\,(1+|u|)\right]^{1-\nu}}{(1-\nu)(1+|u|)} (1+|u|)\, du \right|$$

$$|a_1(x)| \leq \frac{1}{(1-\nu)(2-\nu)} (1+|x|) \left[\text{Log}\,(1+|x|) \right]^{2-\nu} .$$

Montrons par récurrence que nous avons :

$$|a_m(x)| \leq \frac{\Gamma(-\frac{1}{2-\nu})\,(1+|x|)\left[\text{Log}(1+|x|)\right]^{m(2-\nu)}}{(2-\nu)^{2m}\; m!\; \Gamma(m-\frac{1}{2-\nu})}$$

$$|a'_m(x)| \leq \frac{\Gamma(-\frac{1}{2-\nu})\left[\text{Log}\,(1+|x|)\right]^{m(2-\nu)-1}}{(2-\nu)^{2m-1}\,(m-1)!\;\Gamma(m-\frac{1}{2-\nu})}$$

$$|a''_m(x)| \leq \frac{\Gamma(-\frac{1}{2-\nu})\left[\text{Log}(1+|x|)\right]^{(m-1)(2-\nu)-\nu}}{(2-\nu)^{2m-2}\,(m-1)!\;\Gamma(m-1-\frac{1}{2-\nu})(1+|x|)}$$

et

$$|a''_m(x)| \leq \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2-\nu}\right)(1+|x|)\left[\text{Log}(1+|x|)\right]^{(m-1)(2-\nu)}}{(2-\nu)^{2m-2}\ (m-1)!\ \Gamma\left(m-1-\frac{1}{2-\nu}\right)} \quad \text{pour } |x| \leq 1.$$

Nous posons $2-\nu = K > 1$, car par hypothèse $0 \leq \nu < 1$.

Supposons l'' vraie pour m, nous avons :

$$a''_{m+1}(x) = \frac{a_m(x)}{A(x)} .$$

Donc :

$$\left|a''_{m+1}(x)\right| \leq \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{k}\right)\left[\text{Log}(1+|x|)\right]^{mk-\nu}}{k^{2m}\ m!\ \Gamma\left(m-\frac{1}{k}\right)(1+|x|)}$$

et si $|x| < 1$

$$\left|a''_{m+1}(x)\right| \leq \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{k}\right)(1+|x|)\left[\text{Log}(1+|x|)\right]^{mk}}{k^{2m}\ m!\ \Gamma\left(m-\frac{1}{k}\right)}$$

$$a'_{m+1}(x) = \int_0^x a''_{m+1}(u)\ du$$

$$\left|a'_{m+1}(x)\right| < \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{k}\right)\left[\text{Log}(1+|x|)\right]^{mk-\nu+1}}{(mk-\nu+1)\,k^{2m}\ m!\ \Gamma\left(m-\frac{1}{k}\right)} ,$$

c'est-à-dire :

$$\left|a'_{m+1}(x)\right| \leq \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{k}\right)\left[\text{Log}(1+|x|)\right]^{(m+1)k-1}}{k^{2m+1}\ m!\ \Gamma\left(m+1-\frac{1}{k}\right)} ;$$

$$a_{m+1}(x) = \int_0^x a'_{m+1}(u)\, du \quad ,$$

Donc :

$$\left| a_{m+1}(x) \right| \leq \left| \int_0^x \frac{\Gamma(-\frac{1}{k}) \left[\text{Log}\,(1+|u|) \right]^{mk-\nu+1}}{k^{2m+1}\, m!\, \Gamma(m+1-\frac{1}{k})\,(1+|u|)} (1+|u|)\, du \right|$$

$$\left| a_{m+1}(x) \right| \leq \frac{\Gamma(-\frac{1}{k}) \left[\text{Log}\,(1+|x|) \right]^{(m+1)k}}{k^{2m+2}\, (m+1)!\, \Gamma(m+1-\frac{1}{k})} \quad .$$

Comme I.' est vraie pour m=1 , le théorème de récurrence prouve que I' est vraie pour tout m.

Si $f^{(m)}(t)$ vérifie :

$$|f^{(m)}(t)| \leq (\varepsilon_m)^m\, k^{2m}\, m!\, \frac{\Gamma(m-1+1-\frac{1}{k})}{\Gamma(1-\frac{1}{k})}$$

où, ε_m tend vers zéro quand m tend vers l'infini, alors la série

$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(x)\, f^{(m)}(t)$ converge uniformément sur tout borné de $\mathbb{R} \times [0, T]$.

De plus, en dérivant chaque terme de la série, nous obtenons de nouvelles séries uniformément convergentes sur tout borné de $\mathbb{R} \times [0, T]$.

Ce qui prouve en particulier que si W' est la somme de cette série, alors W' appartient à $C^{1,2}(\mathbb{R} \times [0, T])$. Nous voulons de plus que f ainsi que ses dérivées soient nulles pour t = 0, ce qui entraînera W'(x, 0) = 0.
Voyons l'ordre de croissante de $f^{(m)}(t)$. Comme précédemment, on trouve :

$$|f^{(m)}(t)| \leq M_1' (\varepsilon_m)^m \left(\frac{k}{e}\right)^{2m} m^{2m}\, m \quad ,$$

où, M_1 est une constante qui ne dépend pas de m.

Posons, $\varepsilon_m = m^{\delta-1}$ où δ est un réel inférieur à 1, nous avons :

$$|f^{(m)}(t)| \leq M_1 \, m^{(1+\delta)\,m} \, \varepsilon_m \, .$$

Nous connaissons l'existence de fonctions indéfiniment dérivables s'annulant ainsi que toutes leurs dérivées pour t=0, ces fonctions n'étant pas identiquement nulles, et vérifiant l'inégalité :

$$|f^{(m)}(t)| \leq M_1 \, m^{(1+\delta)m} \, .$$

Si f est une telle fonction, alors la fonction W', somme de la série :

$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) \; f^{(m)}(t)$ non identiquement nulle vérifie :

$$\begin{cases} A(x) \; \dfrac{\partial^2 W'}{\partial u^2} - \dfrac{\partial W'}{\partial t} = 0 \\ W'(x,0) = 0 \\ W' \text{ appartient à } C^{1,2}(\mathbb{R} \times [0,T]). \end{cases}$$

De plus, cette fonction W' croit moins vite que

$$\exp\left[m_o \left[\text{Log}\,(1+|x|) \right]^{\frac{k}{1-\delta}} \right] \, .$$

C'est-à-dire que pour δ suffisamment petit, $\frac{2-\nu}{1-\delta} < 2-\nu+\varepsilon$ la fonction W' appartient à $K_{\psi' 2\,\varepsilon}$.

Nous traitons ici le cas $\nu = 1$ que nous avons exclus précédemment.

Nous définissons A(x) par :

A(x) appartenant à $C^1(\mathbb{R})$ et vérifiant :

$$A(x) \geqslant (e + |x|)^2 \left[\text{Log}(e + |x|)\right]$$

$$A(x) = (e + |x|)^2 \quad \text{Log}\,(e + |x|) \text{ pour } |x| \geqslant 1$$

$$\frac{dA(x)}{dx} \leqslant M(e + |x|) \quad \text{Log}\,(e + |x|)\,. \text{ (M constante positive.)}$$

Nous montrons comme précédemment que nous avons :

$$-2u \frac{dA(x)}{dx} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \quad \leqslant \quad C_1 \, u^2 \; + \; A(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

et que les hypothèses demandées dans le théorème 3.1.2 sont vérifiées.

Nous cherchons une solution sous forme de série .

Nous posons formellement :

$$W''(x, t) = \sum_{m=0}^{+} a_m(x) \quad f^{(m)}(t) \quad ,$$

où, $a_m(x)$ sont des fonctions de x, et $f^{(m)}(t)$ est la dérivée d'ordre m d'une certaine fonction de t.

En identifiant, nous avons :

$$\begin{cases} a_0'' = 0 \\ A(x) \quad a_{m+1}'' = \quad a_m \; . \end{cases}$$

Nous déterminons les fonctions a_m par la récurrence suivante :

$$a_0(x) = e + x$$

$$a_{m+1}(u) = \int_0^x \left[\int_0^\rho \frac{a_m(u)}{A(u)}\, du \right] d\rho$$

Majorons a_m ainsi que ses dérivées première et deconde, nous avons :

$$\left| a''_1(x) \right| \leq \frac{1}{(e + |x|) \operatorname{Log}(e + |x|)}$$

$$\left| a'_1(x) \right| \leq \operatorname{Log} . \operatorname{Log}(e + |x|)$$

$$\left| a_1(x) \right| \leq \left| \int_0^x \frac{\operatorname{Log} \operatorname{Log}(e + |u|)}{(e + |u|) \operatorname{Log}(e + |u|)} (e + |u|) \operatorname{Log}(e + |u|)\, du \right|$$

$$\left| a_1(x) \right| \leq \frac{1}{2} \left[\operatorname{Log} \operatorname{Log}(e + x) \right]^2 (e + |x|) \operatorname{Log}(e + |x|)$$

Comme précédemment, nous montrons par récurrence que :

$$\left| a_m(x) \right| \leq \frac{1}{2m!} \left[\operatorname{Log} \operatorname{Log}(e + |x|) \right]^{2m} (e + |x|) \left[\operatorname{Log}(e + x) \right]^m$$

$$\left| a'_m(x) \right| \leq \frac{1}{(2m-1)!} \left[\operatorname{Log} \operatorname{Log}(e + |x|) \right]^{2m-1} \left[\operatorname{Log}(e + |x|) \right]^m$$

$$\left| a''_m(x) \right| \leq \frac{1}{(2m-2)!} \frac{\left[\operatorname{Log} \operatorname{Log}(e + |x|) \right]^{2m-2} \left[\operatorname{Log}(e + |x|) \right]^{m-2}}{(e + |x|)} .$$

Si $f^{(m)}(t)$ vérifie :

$$\left| f^{(m)}(t) \right| \leq (\varepsilon_m)^m \, 2m! \text{ , où } \varepsilon_m \text{ tend vers zéro quand m tend vers}$$

l'infini, alors la série $\sum_{m=0}^{+} a_m(x)\ f^{(m)}(t)$ converge uniformément sur tout borné de $\mathbb{R} \times [0, T]$. De plus, sa somme $W''(x, t)$ appartient à $C^{1,2}(\mathbb{R} \times [0, T])$.

Posons $\varepsilon_m = m^{\delta - 1}$ où δ est un réel inférieur à 1.

Nous connaissons l'existence de fonctions indéfiniment dérivables s'annulant ainsi que toutes leurs dérivées pour t = 0, ces fonctions n'étant pas identiquement nulles et vérifiant l'inégalité :

$$\left| f^{(m)}(t) \right| \leq M_1 \ m^{(1+\delta)\, m} \quad .$$

Si f est une telle fonction, alors la fonction W'' somme de la série :

$\sum_{m=0}^{+} a_m(x)\ f^{(m)}(t)$ non identiquement nulle, vérifie :

$$\begin{cases} A(x)\ \dfrac{\partial^2 W''}{\partial x^2} - \dfrac{\partial W''}{\partial t} = 0 \\ W''(x, 0) = 0 \\ W'' \text{ appartenant à } C^{1,2}(\mathbb{R} \times [0, T]) \ . \end{cases}$$

De plus, cette fonction W'', non identiquement nulle, croit moins vite que :

$$\exp\left[m_o \left(\text{Log}\,(1 + |x|)\right)^{\frac{1 + 2\varepsilon'}{1 - \delta}} \right] \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon' \text{ positif.}$$

En effet, ε' étant donné, on sait que :

$$\text{Log Log}\,(e + |x|) \leq K_1 \left[\text{Log}\,(e + |x|) \right]^{\varepsilon'}$$

où K_1 est une constante positive .

Nous avons donc $\dot{}_{2m}$

$$\left| a_m(x) \right| \leq \frac{K_1}{2m\,!} \left(e + |x| \right) \left[\text{Log} \left(e + |x| \right) \right]^{m(1 + 2\varepsilon')}$$

et comme précédemment , nous trouvons que $W''(x, t)$ croît moins vite que :

$$\exp \left[m_o \left[\text{Log} \left(1 + |x| \right) \right]^{\frac{1 + 2\varepsilon'}{1 - \delta}} \right]$$

C'est-à-dire que pour δ et ε' suffisamment petits $\frac{1 + 2\,\varepsilon'}{1 - \delta} < 1 + \varepsilon$

la fonction W'' appartient à $K \psi_{1_{2\,\varepsilon}}$.

IV - REMARQUES GENERALES

Dans le chapitre II, nous avons montré que les fonctions $\phi_{m,\beta,\tau}$, $\phi'_{m,\beta,\tau}$, ϕ_m vérifiaient les hypothèses demandées pour l'application du théorème 1.1.1 et 1.2.1, suivant l'ordre de croissance des coefficients.

Pour obtenir de telles fonctions, nous avons cherché à déterminer des solutions de :

$$B \begin{cases} \phi \text{ lipschitzienne dans } \mathbb{R}_+ \times [0,T] \text{ à valeurs dans } \mathbb{R}_+, \text{ les} \\ \text{fonctions } t \to \phi(|x|,t) \text{ et } |x| \to \phi(|x|,t) \text{ sont décroissantes,} \\ \phi \text{ est solution de l'inéquation suivante :} \\ -\phi\phi_t\, G - \phi^2(H + c_1) - \frac{32\, K_o^2}{2-\mu}\, \phi_{|x|}^2\, F \geq 0, \\ \text{sous forme exp. } - u(t).\, v(x). \end{cases}$$

Nous avons vu dans ce chapitre, l'intérêt d'obtenir des fonctions ϕ qui décroissent le plus rapidement possible, car les théorèmes du chapitre II sont applicables dans les espaces K_ψ où ψ décroît d'une manière analogue à ϕ (théorèmes 2.1.1, 2.1.2).

La question que l'on se pose ici est la suivante :
est-il possible d'obtenir des solutions de B qui décroissent plus vite que les $\phi_{m,\beta,\tau}$, $\phi'_{m,\beta,\tau}$ obtenues ?

La réponse, dans un certain sens, à cette question est donnée par les théorèmes suivants :

THEOREME 4.1.1.

Supposons qu'il existe r_o tel que, pour tout $|x| \geq r_o$, on ait :

$$\frac{F}{G} \geq K_1\, (1 + |x|)^{\lambda}$$

$$\frac{c_1}{G} \geq K_1\, (1 + |x|)^{2-\lambda}$$

où λ et K_1 sont des constantes positives, λ inférieure à 2.

Alors, il n'existe pas de solution ϕ de B telle que :

$\phi = O(\Psi_\varepsilon)$ quand $|x|$ tend vers l'infini où la fonction Ψ_ε est déterminée par :

$$\Psi_\varepsilon(|x|,t) = \exp. -|x|^{2-\lambda+\varepsilon}$$ et ceci pour tout $\varepsilon > 0$.

THEOREME 4.1.2.

Supposons qu'il existe r_o tel que, pour tout $|x| \geq r_o$ on ait :

$$\frac{F}{G} \geq K_1(1+|x|)^2 \left[\text{Log}(2+|x|)\right]^\nu,$$

$$\frac{c_1}{G} \geq K_1 \left[\text{Log}(2+|x|)\right]^{2-\nu},$$

où ν et K_1 sont des constantes positives, $0 \leq \nu \leq 1$.

Alors, il n'existe pas de solution ϕ de B telle que :

$\phi = O(\Psi'_\varepsilon)$ quand $|x|$ tend vers l'infini, où la fonction Ψ'_ε est déterminée par :

$$\Psi'_\varepsilon(|x|,t) = \exp.\left[\text{Log}(1+|x|)\right]^{2-\nu+\varepsilon}$$

et ceci pour tout ε.

Démonstration.

Supposons l'existence d'un ε_1 et d'une solution ϕ_{ε_1} de B telle que :

$\phi_{\varepsilon_1} = O(\Psi_{\varepsilon_1})$ quand $|x|$ tend vers l'infini.

Soit la fonction $\Psi_{\varepsilon_1,\lambda'}$ définie dans $\mathbb{R}_+ \times [0, \frac{T}{\lambda'}]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, par :

$$(|x|, r) \rightarrow \quad \phi_{\varepsilon_1,\lambda'}(|x|,t) = \phi_{\varepsilon_1}(r_o,\lambda' t) \text{ pour } 0 \leq |x| \leq r_o$$

$$= \phi_{\varepsilon_1}(|x|,\lambda' t) \text{ pour } |x| > r_o$$

Montrons qu'il existe λ'_o tel que, pour tout $\lambda' \geq \lambda'_o$, $\phi_{\varepsilon_1,\lambda'}$ soit solution de,

$$B' \begin{cases} \phi \text{ lipschitzienne dans } \mathbb{R}_+ \times \left[0,\frac{T}{\lambda'}\right] \text{ à valeurs dans } \mathbb{R}_+, \text{les fonctions} \\ t \to \phi(|x|,t) \text{ et } |x| \to \phi(|x|,t) \text{ sont décroissantes,} \\ \phi \text{ est solution presque partout de l'inéquation suivante :} \\ -\phi\phi_t - M_1(1+|x|)^{2-\lambda}\phi^2 - M_2(1+|x|)^{\lambda}\phi_{|x|}^2 \geq 0 \end{cases}$$

où M_1 M_2 sont des constantes positives, λ_o dépendant de M_1 M_2 et de r_o.

Il suffit de montrer que $\phi_{\varepsilon_1,\lambda'}$ est solution de l'inéquation.

Si $|x| > r_o$, nous devons avoir :

$$-\lambda' \phi_{\varepsilon_1} \frac{\partial \phi_{\varepsilon_1}}{\partial t} - M_1(1+|x|)^{2-\lambda} \phi_{\varepsilon_1}^2 - M_2 (1+|x|)^{\lambda}\left[\frac{\partial \phi_{\varepsilon_1}}{\partial |x|}\right]^2 \geq 0.$$

Inégalité vraie si $\lambda' \geq \sup\left[\frac{M_1}{K_1}, \frac{M_2}{K_1}\right]$, car, par hypothèse, ϕ_{ε_1} vérifie :

$$-\phi_{\varepsilon_1} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} - K_1(1+|x|)^{2-\lambda}\phi_{\varepsilon_1}^2 - K_1(1+|x|)^{\lambda} \frac{\partial \phi_{\varepsilon_1}}{\partial |x|}^2 \geq 0 \text{ pour } |x| > r_o.$$

Si $|x| \leq r_o$, nous devons avoir :

$$-\lambda' \phi_{\varepsilon_1}(r_o,t) \frac{\partial \phi_{\varepsilon_1}(r_o,t)}{\partial t} - K_1(1+|x|)^{2-\lambda} \phi_{\varepsilon_1}^2(r_o,t) \geq 0.$$

Inagalité vraie si $\lambda' \geq K_1(1+r_o)^{2-\lambda}$.

D'où $\phi_{\varepsilon_1,\lambda'}$ sera solution de B' si $\lambda' \geq \lambda'_o$, avec

$$\lambda'_o = \sup\left[\frac{M_1}{K_1}, \frac{M_2}{K_1}, K_1(1+r_o)^{2-\lambda}\right].$$

Considérons maintenant le contre-exemple du théorème 3.1.1. Nous avons déterminé une solution W non identiquement nulle vérifiant :

$$\begin{cases} A(x)\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \dfrac{\partial W}{\partial t} = 0 \\ W(x,0) = 0 \end{cases}$$

où A(x) vérifie : $A(x) \geq (1+|x|)^{\lambda}$

$A(x) = (1+|x|)^{\lambda}$ pour $|x| \geq 1$.

De plus W vérifie :

$$|W(x,t)| \exp. -|x|^{2-\lambda} + \frac{\varepsilon_1}{2} \leq K \quad K \text{ constante positive.}$$

Montrons que si ϕ_{ε_1} existe, alors on peut appliquer le corollaire 1.1 à W et à $\phi_{\varepsilon_1,\lambda'}$ pour λ' assez grand.

En effet, nous avons vu que W était solution de :

$$-2W\left[\frac{\partial}{\partial x}(A(x)\frac{\partial W}{\partial x}) - \frac{\partial W}{\partial t}\right] \leq c_1 W^2 + A(x)\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2,$$

où $c_1 = M_3(1+|x|)^{2-\lambda}$, M_3 étant une constante positive.

De plus, la fonction $\phi_{\varepsilon_1,\lambda'}$ vérifie :

$\phi_{\varepsilon_1,\lambda'}$ lipschitzienne dans $\mathbb{R}_+ \times \left[0,\frac{T}{\lambda'}\right]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,

(on prendra $r_o = 1$).

les fonctions $t \to \phi_{\varepsilon_1,\lambda'}(|x|,t)$ et $|x| \to \phi_{\varepsilon_1,\lambda'}(|x|,t)$ sont décroissantes,

la fonction $\phi_{\varepsilon_1,\lambda'}$ est solution presque partout de :

$$-\phi\phi_t - M_3(1+|x|)^{2-\lambda}\ \phi^2 - \frac{32K_o^2}{2-\mu}(1+|x|)^{\lambda}\ \phi_{|x|}^2 \geq 0$$

pourvu que $\lambda \geq \sup \left(\frac{M_3}{K_1} , \frac{32\, K_0^2}{(2-\mu)K_1} , K_1 (2)^{2-\lambda}\right)$.

Il reste à montrer la condition 1.1.7' qui s'exprime ici par :
pour tout $\tau_1, \tau_2 \quad 0 < \tau_1 < \tau_2 \leq \frac{T}{\lambda}$, il existe une suite $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini et une suite $(R_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tendant vers zéro telles que :

$$I_{r_m} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\left[2\, \phi^2_{\varepsilon_1 \lambda'} \quad W A(x) \frac{\partial W}{\partial x} \right]_{x=r_m} - \left[2\, \phi^2_{\varepsilon_1 \lambda'} W A(x) \frac{\partial W}{\partial x} \right]_{x=r_m} \right] dt$$

$$\leq R_m$$

En effet, nous avons, si $r \geq 1$:

$$I_r \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\left| W \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=r} + \left| W \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=-r} \right] 2\phi^2_{\varepsilon_1 \lambda'} (1+r)^{\lambda} \, dt = I'_r$$

Considérons l'intégrale :

$$J_r = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^r 2\, \phi^2_{\varepsilon_1 \lambda'} (1+x)^{\lambda} \left[\left| W(x,t) \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right| + \left| W(-x,t) \frac{\partial W(-x,t)}{\partial x} \right| \right] dx\, dt$$

Nous savons que :

$$\exp - |x|^{2-\lambda + \frac{\varepsilon_1}{2}} \, |W(x,t)| < K$$

Nous démontrerions de même (voir le contre-exemple) que :

$$\exp - |x|^{2-\lambda + \frac{\varepsilon_1}{2}} \left| \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right| \leq K'$$

où K et K' sont des constantes positives.

Donc l'intégrale J_r converge quand r tend vers l'infini.

Mais nous avons (théorème de Fubini)

$$J_r = \int_0^r I'_x \, dx$$

Soit R et s deux constantes positives quelconques et supposons que pour tout $x > s$, on ait :

$$I'_x > R$$

alors,

$$J_r \geq \int_0^s I'_x \, dx + (r - s) \; R \quad \text{pour tout} \quad r > s$$

Donc J_r tendrait vers l'infini quand r tendrait vers l'infini ; ce qui est impossible car J_r converge.

Donons-nous une suite $(R_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tendant vers zéro quand m tend vers l'infini et définissons la suite $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

r_1 défini de telle sorte que $I'_{r_1} < R_1$

Si r_m est définie, nous définissons r_{m+1} par $r_{m+1} > r_m + 1$ de telle sorte que $I'_{r_m} < R_m$, une telle suite est bien définie.

Nous avons donc démontré qu'il existe une suite $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini et une suite R_m tendant vers zéro telles que :

$$I_{r_m} \leq I'_{r_m} < R_m \quad .$$

On peut donc appliquer le corollaire 1.1.

Nous avons donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi^2_{\varepsilon_1, \lambda'} W^2 \, dx \quad \text{fonction décroissante de t.}$$

Comme $W(x, 0)=0$, nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi^2_{\varepsilon_1, \lambda'} W^2 \, dx = 0 \quad \text{pour tout t, donc} \quad W \equiv 0 \ .$$

Ce qui est contraire au résultat prouvé : W n'est pas identiquement nul. Donc, l'hypothèse que $\phi_{\varepsilon_1, \lambda'}$ existe est fausse ; ce qui démontre le théorème 4.1.1.

La démonstration du théorème 4.1.2. est identique en utilisant un des contre-exemples du théorème 3.1.2 suivant que $\nu \neq 1$ ou que $\nu = 1$.

UNICITE DANS DES CAS NON-LINEAIRES

Nous avons utilisé les théorèmes 1.1 et 1.2 pour démontrer des théorèmes d'unicité dans le cas où l'opérateur L_2 était linéaire (chapitre III). Nous pouvons employer la même méthode pour obtenir des théorèmes d'unicité dans le cas non linéaire, mais les conditions exigées pour l'opérateur seraient très complexes. Nous nous limiterons à étudier quelques cas particuliers. Nous supposerons que $N=1$, pour N quelconque il n'y a aucune difficulté.

Position du problème : Soit l'opérateur du type suivant :

$$L_3 v = \sum_i D_i [\mathcal{P}_i(v)] - \sum_k D_t [\alpha \ v] + B(v)$$

où B est un opérateur du premier ordre ne faisant pas intervenir les dérivées par rapport à la variable t.

Nous cherchons les solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} L_3 v = f \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, T] \text{ où f est une fonction donnée.} \\ v(x, t) = 0 \quad \text{pour } (x, t) \text{ appartenant à} \quad \Gamma \times [0, T] \\ v(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Nous supposerons dans toute la suite que u et v sont deux solutions de ce problème, et nous voulons démontrer que $u=v$ dans $\Omega \times [0, T]$.

Nous ramenons toujours le problème à l'étude du problème suivant :

$$I \quad \begin{cases} L_3 u - L_3(v) = 0 \\ u - v = 0 \quad \text{pour tout point de} \quad \Gamma \times [0, T] \\ u - v = 0 \quad \text{pour } t = 0 \ . \end{cases}$$

Exemple 1. Si L_3 est un opérateur quasi-linéaire, où $\mathcal{P}_i(v) = \sum_j a_{ij} D_j v$

Si B est un opérateur qui vérifie la condition suivante :
il existe r_o (constante positive) telle que pour tout r supérieur ou égal à r_o, et pour tout t appartenant à $[0, T]$ on ait :

$$\int_{\omega_r} (u-v) \ [B(u)-B(v)] \, dx \leq \int_{\omega_r} \left[c_1 (u-v)^2 + \mu \sum_{i,j} a_{ij} D_i(u-v) \, D_j(u-v) \right] dx$$

où c_1 appartient à C(S) et μ une constante positive inférieure à 2.

Alors les résultats du chapitre III s'appliquent textuellement.

En effet, vu la condition posée, le problème I se ramène à l'étude des recherches des solutions d'une inéquation du type 3. 1. 3, et le résultat s'en déduit facilement.

Exemple 2. Si les opérateurs $\mathcal{P}_i$ vérifient la condition de monotonie suivante :

pour tout u et v vérifiant certaines propriétés

$$\sum_i D_i(u-v) \left[\mathcal{P}_i(u) - \mathcal{P}_i(v) \right] \geq 0 .$$

si $B \equiv 0$.

Nous obtenons par un calcul analogue au calcul du chapitre I.

$$-2\phi\phi_t \alpha (u-v)^2 + 4\phi\phi_i (u-v) \left[\mathcal{P}_i(u) - \mathcal{P}_i(v) \right] +$$

$$2\phi^2 \sum D_i(u-v) \left[\mathcal{P}_i(u) - \mathcal{P}_i(v) \right] \leq D_i \left[2\phi^2 (u-v) \left[\mathcal{P}_i(u) - \mathcal{P}_i(v) \right] \right]$$

$$- D_t \left[\phi^2 \alpha (u-v)^2 \right] .$$

Si nous considérons que ϕ n'est une fonction que de la variable t, alors nous avons :

$$0 \leq -2\phi\phi_t \alpha(u-v)^2 + 2\phi^2 \sum D_i(u-v) \left[\mathcal{P}_i(u) - \mathcal{P}_i(v) \right] \leq$$

$$D_i \left[2\phi^2 (u-v) \left(\mathcal{P}_i(u) - \mathcal{P}_i(v) \right) \right] - D_t \left[\phi^2 \alpha (u-v)^2 \right].$$

En intégrant sur $\omega_r \times [\tau_1, \tau_2]$, nous obtenons, en supposant que nous puissions appliquer le lemme 1.1.2 :

$$0 \leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \left[-2\,\phi\phi_t\,\alpha\,(u-v)^2 + 2\phi^2 \sum D_i(u-v)\,[\mathcal{P}_i(u) - \mathcal{P}_i(v)] \right] dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_r} 2\,\phi^2\,(u-v)\,[\mathcal{P}_i(u) - \mathcal{P}_i(v)]\,\frac{x_i}{r}\,ds\,dt \quad +$$

$$+ \left[\int_{\omega_r} \phi^2\,\alpha\,(u-v)^2\,dx \right]_{t=\tau_1} - \left[\int_{\omega_r} \phi^2\,\alpha\,(u-v)^2\,dx \right]_{t=\tau_2}$$

Si par exemple nous supposons que u et $\mathcal{P}_i(u)$ appartiennent à $L^2(\Omega \times [0,T])$, alors nous démontrerions qu'il existe deux suites $(r_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini et $(R_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tendant vers zéro telles que :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_{r_m}} 2\,\phi^2(u-v)\,[\mathcal{P}_i(u) - \mathcal{P}_i(v)]\,\frac{x_i}{r}\,ds\,dt \leqslant R_m$$

et ceci pour tout τ_1, τ_2 .

Nous démontrerions donc que :

$\left(\int_\Omega \phi^2\,\alpha(u-v)^2\,dx \right)$ est une fonction décroissante de t et

et nous en déduirons que $u \equiv v$.

Exemple 3. Si à la place de la monotonie nous supposions que $\mathcal{P}_i$ vérifie la condition suivante :

$$\sum_i (\xi_i - \xi'_i) \left[P_i(u, \beta_j) - P_i(v, \beta_j) \right] \leqslant$$

$$\leqslant K_0 \quad \lambda F \sum_i (\xi_i - \xi'_i)^2 + \frac{1}{\lambda} \sum_i (\beta_i - \beta'_i) (P_i(u, \beta_j) - P_i(v, \beta'_j)),$$

et ceci pour tout $\lambda > 0$, où F est une fonction définie dans S.

si $\mathcal{P}_i$ vérifie la condition i ,

si α vérifie les conditions iii et iv' ,

si B vérifie la condition donnée dans l'exemple I, alors nous avons les mêmes résultats que dans le chapitre III.

B I B L I O G R A P H I E

1 S. AGMON et L. NIRENBERG : "Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space". Comm. Pure Appl. Math., Vol XVI (1963), pp 121-239.

2 D. G. ARONSON et P. BESALA : "Uniqueness of positive solutions of parabolic equations with unbounded coefficients". Coll. Math. XVIII (1967) pp 125-135.

3 J. CHABROWSKI : "Sur l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation linéaire du type parabolique." Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Série III, Vol XXIII, Fasc. IV, (1969) pp 547-552.

4 D. E. EDMUNDS et VALERIE WILLIAMS : "Hyperbolic differential inequalities". Journal London Math. Soc., 42 (1967).

5 I. M. GUELFAND - G. E. CHILOV : "Les distributions" Collection Universitaire de Mathématiques. Edit. DUNOD.

6 M. LEES : "Asymptotic behavior of solutions of parabolic differential inequalities". Canadian J. of Maths., 14 (1962).

7 M. LEES et M. H. PROTTER : "Unique continuation for parabolic differential equations and inequalities". Duke Math. J., 28 (1961), 369-382.

8 J. L. LIONS et B. MALGRANGE : "Sur l'unicité rétrograde dans les problèmes mixtes paraboliques". Math. Scand. 8 (1960), 277-286.

9 P. MUSTATA : "Un théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation linéaire parabolique d'un second ordre". Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa XXI (1967) p. 507-526.

M. NICOLESCU et C. FOIAS : "Représentation de Poisson et problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur". Rend. Acad. Naz. Dei Lincei 38, Fasc. 4 (1965) p. 465-467 ; 38, fasc. 5 (1965), p. 621-627 ; 40, fasc. 5 (1966) p. 785-791.

M. H. PROTTER : "Asymptotic behavior and uniqueness theorems for hyperbolic equations and inequalities", Tech. Rep. Contract AF 49 (638) - 398, Univ. of Calif., Berkeley, Calif., 1960.

F. RIESZ et B. SZ NAGY : "Leçons d'analyse fonctionnelle". Editeur Gauthier-Villars.

Séminaire SCHWARTZ 1959/1960.

DEUXIEME THESE

Proposée par Monsieur le Professeur A. MARTINEAU

Etude des processus stochastiques d'après l'article de KIYOSI ITO : "Canonical measurable random functions", Matematisk Institut, Aarhus Universitet - Aarhus, Denmark.

VU
Marseille, le

Le Président des Thèses

VU
Marseille, le

Le Directeur de l'U.E.R. Marseille-Luminy

VU et PERMIS D'IMPRIMER
Aix-en-Provence, le
Le Recteur de l'Académie d'Aix-Marseille